

代数的トポロジーと センサーネットワーク被覆問題

林 和則

京都大学大学院情報学研究科

E-mail: kazunori@i.kyoto-u.ac.jp

2008年12月19日

IEEE COMS Kansai Chapter 技術講演会
奈良先端科学技術大学院大学

なぜ代数的トポロジーなのか？

◆ R. Ghrist(イリノイ大)の仕事

- 力学系やトポロジーを専門とする数学者
- 2005年以降, センサーネットワークの諸問題にホモロジー群を用いた強力な手法を提案
- 2007年Scientific American(アメリカの一般読者向け科学雑誌)ベスト50を受賞
- http://www.math.uiuc.edu/~ghrist/index_files/preprints.htm

◆ ホモロジー群計算ソフトウェア

- CHomP (Computational Homology Project, rutgers)
<http://chomp.rutgers.edu/>
- PLEX (Simplicial complexes in MATLAB, stanford)
<http://comptop.stanford.edu/programs/plex/>

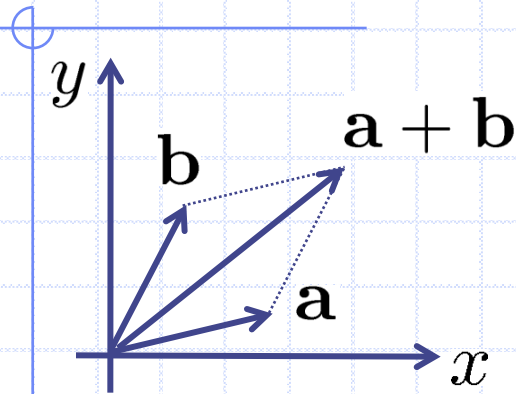
◆ TIN (Topology, Informatics, and Network)勉強会

- 平岡裕章(広大)の声かけで始まった, 数学者と工学者の勉強会
- 国府寛司(京大), 小川知之(阪大), 荒井迅(北大), 岡宏枝(龍大), 原晋介(大阪市大), 池田和司(奈良先端大), 桶谷賢吾(NEC), 小野文枝(横国大)など
- <http://www.mis.hiroshima-u.ac.jp/~hiraoka/tin.htm>

AGENDA

- ◆ 代数的トポロジーとは
- ◆ ホモロジー群入門
 - ホモロジーの基本的構成
 - 単体と単体複体
 - チェイン群とチェイン複体
 - サイクルとバウンダリ
 - ホモロジー群
 - ホモロジー群の計算(具体例)
- ◆ ホモロジー群計算ソフトウェアの紹介
- ◆ センサーネットワーク被覆問題
- ◆ R.Ghristの研究紹介
- ◆ 分散ホモロジー群計算アルゴリズム

代数的トポロジーとは



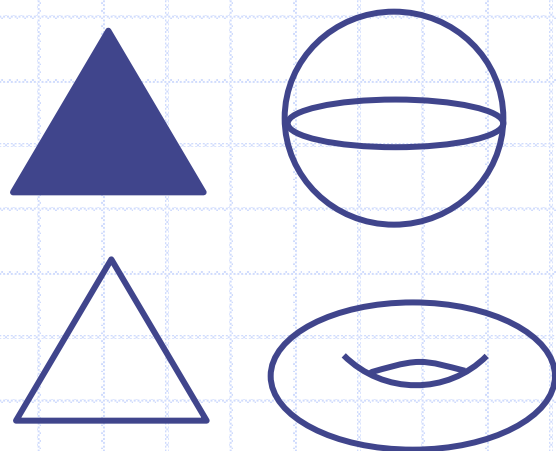
代数化



- ・高次元化
- ・扱いの簡略化

「線形代数」

抽象化(代数化)によって得た柔軟な表現力で、応用の範囲を広げている



代数化



- ・高次元化
- ・扱いの簡略化

「代数的トポロジー
(代数的位相幾何学)」

その中の一つ概念:
ホモロジー群

幾何的対象(図形)

トポロジカルな量：連結成分，穴，空洞



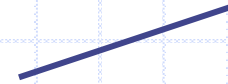
1つの点

連結成分:1
穴:0
空洞:0



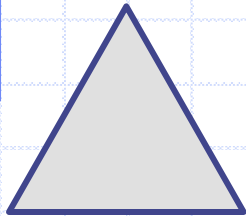
2つの点

連結成分:2
穴:0
空洞:0



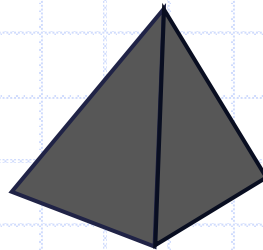
線分

連結成分:1
穴:0
空洞:0



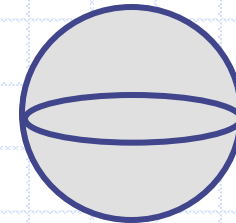
三角形

連結成分:1
穴:0
空洞:0



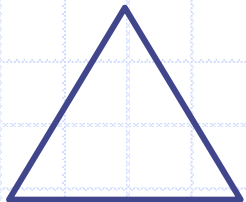
四面体

連結成分:1
穴:0
空洞:0



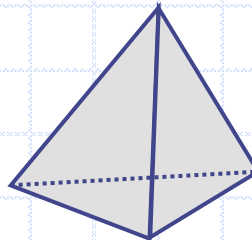
球(中抜き)

連結成分:1
穴:0
空洞:1



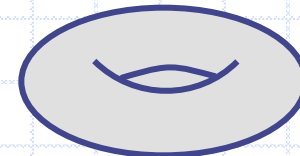
三角形のふち

連結成分:1
穴:1
空洞:0



四面体(中抜き)

連結成分:1
穴:0
空洞:1



トーラス(中抜き)

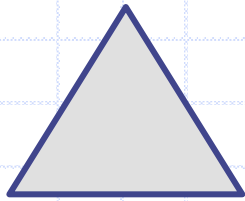
連結成分:1
穴:2
空洞:1

ホモロジーとは

ホモロジーは幾何学的対象である図形が

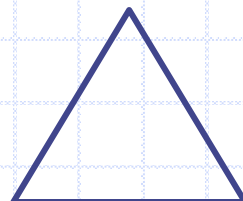
- いくつの部分(連結成分)に分かれているか
- 各部分には穴(トンネル)が開いているか
- 各部分には空洞(中空の部分)があるか

などの情報を代数的な形(ベクトル空間の次元)で与える



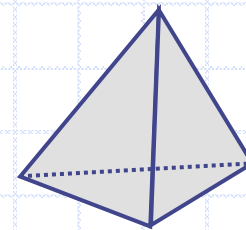
X: 三角形

連結成分: 1
穴: 0
空洞: 0



∂X

連結成分: 1
穴: 1
空洞: 0



Y: 四面体(中無し)

連結成分: 1
穴: 0
空洞: 1

ホモロ
ジー群:

$$H_i(X) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & i = 0 \\ \{0\}, & \text{その他} \end{cases}$$

$$H_i(\partial X) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & i = 0, 1 \\ \{0\}, & \text{その他} \end{cases}$$

$$H_i(Y) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & i = 0, 2 \\ \{0\}, & \text{その他} \end{cases}$$

0次
1次
2次

ホモロジー群のベクトル空間の次元は

連結成分
穴
空洞

の数に対応

ホモロジーの基本構成

1. (曲面を各面が三角形である多面体(単体)で近似する)
2. 多面体を構成する頂点・辺・面の集合(単体複体)を作る
3. 頂点・辺・面のそれぞれに対応するベクトル空間(チェイン群)を作る
4. 頂点・辺・面のつながり方からそれらのベクトル空間の間の線形写像(境界作用素)を作る
5. ベクトル空間と線形写像の組からホモロジーのベクトル空間を求める

チェイン複体(鎖複体)という

単体

十分大きな次元のユークリッド空間 \mathbb{R}^N 内の $n+1$ 個の点 A_0, A_1, \dots, A_n に対し、ベクトル $\mathbf{u}_k = \overrightarrow{A_0A_k}$ と定める. ($\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ は1次独立とする)

n 単体:

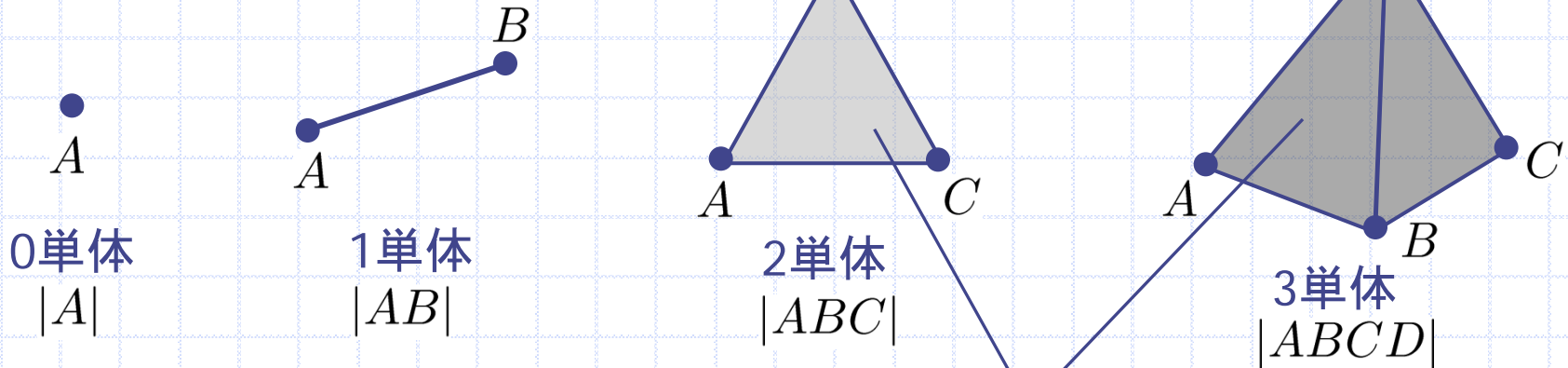
n 個のベクトル $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ によって張られる n 次元錐体

$$|A_0A_1 \cdots A_n| = \overrightarrow{OA_0} + \left\{ \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{u}_k \mid \sum_{k=1}^n a_k \leq 1, \forall k a_k \geq 0 \right\}$$

- n をこの単体の次元という
- A_0, A_1, \dots, A_n で定まる最小の凸集合
- 0-単体: 頂点, 1-単体: 線分, 2-単体: 三角形, 3-単体: 四面体

単体(続)

単体の具体例:



中身も含まれることに注意!

面(境界単体):

n 単体 $\sigma = |A_0A_1 \cdots A_n|$ から, $q+1$ 個の頂点を選ぶと q 単体 $|A_{k_0} \cdots A_{k_q}|$ が定まる. これを σ の q 面 (q 境界単体)と呼ぶ

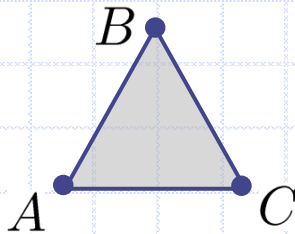
単体複体

有限個の単体の集合 K が次の2つの条件を満たすとき単体複体と呼ぶ

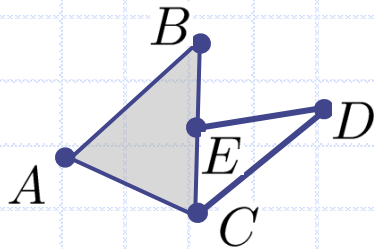
1. $\sigma \in K$ とすると σ のすべての面も K に属する
2. $\sigma_1, \sigma_2 \in K, \sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$ ならば, $\sigma_1 \cap \sigma_2$ は σ_1, σ_2 の両方の面である

K の次元 $\dim K$: 単体複体 K に属する単体の次元のうちで最大のもの

例:



$K = \{|ABC|, |AB|, |BC|, |CA|, |A|, |B|, |C|\}$
単体複体である



単体複体でない
($|BC| \cap |ED| = |E|$ は $|BC|$ の面ではない)

単体複体が与えられたときにその和集合をとることで得られる図形を
単体複体 K の幾何的实现 $|K|$ と呼ぶ

チェイン群 (鎖群)

単体複体 K に対して,

- 頂点 (0単体) に対応するベクトル空間: $C_0(K)$
- 辺 (1単体) に対応するベクトル空間: $C_1(K)$
- 三角形 (2単体) に対応するベクトル空間: $C_2(K)$
- ...

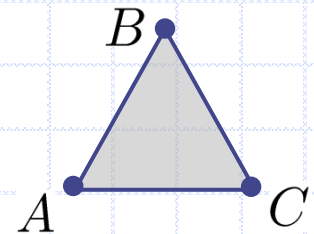
のようにベクトル空間の列 $\{C_k(K)\}$ を考える

具体例: 内部も含めた三角形

$$K = \{|ABC|, |AB|, |BC|, |CA|, |A|, |B|, |C|\}$$

↓ 記号化

$$\hat{K} = \{|\hat{A}\hat{B}\hat{C}|, |\hat{A}\hat{B}|, |\hat{B}\hat{C}|, |\hat{C}\hat{A}|, |\hat{A}|, |\hat{B}|, |\hat{C}|\}$$



0チェイン群: $C_0(K) = \{\alpha|\hat{A}| + \beta|\hat{B}| + \gamma|\hat{C}| \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

1チェイン群: $C_1(K) = \{u|\hat{B}\hat{C}| + v|\hat{C}\hat{A}| + w|\hat{A}\hat{B}| \mid u, v, w \in \mathbb{R}\}$

2チェイン群: $C_2(K) = \{a|\hat{A}\hat{B}\hat{C}| \mid a \in \mathbb{R}\}$

チェイン群 (鎖群) (続)

K_k : 単体複体 K に属する単体のうちで次元が k のものの全体のなす部分集合.

$\hat{\sigma}$: 単体 σ をベクトル空間の基底とみなせるような抽象的な記号と見直したもの

\hat{K}, \hat{K}_k : K や K_k の元を全て記号とみなしたときの集合

K の k チェイン群 $C_k(K)$: 単体複体 K に対し, \hat{K}_k で生成される実ベクトル空間. すなわち, $\hat{K}_k = \{\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_m\}$ とするとき, 形式和

$$a_1\hat{\sigma}_1 + a_2\hat{\sigma}_2 + \dots + a_m\hat{\sigma}_m \quad (a_i \in \mathbb{R})$$

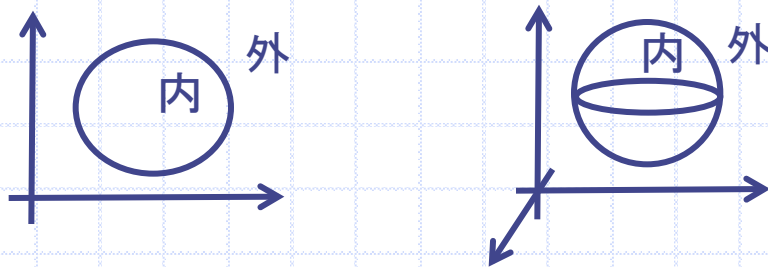
で表される元全体のなす集合 (各元を k チェインと呼ぶ).

和とスカラー倍の演算が自然に定義できるのでベクトル空間となり, その基底は $\{\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_m\}$

k チェインは直接的な幾何的イメージを持たないことに注意!

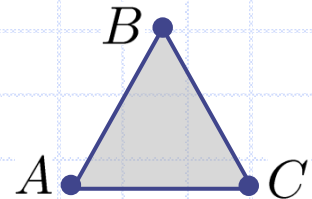
単体の境界と向き

ホモロジー群は図形の境界に注目して得られる不変量
(穴や空洞の情報を得るためには境界を考えることが基本的)



2単体(内部も含めた三角形) $\sigma = |ABC|$ の場合:

境界は $|AB|, |BC|, |AC|$ の三辺に対応する3つの1単体



$\hat{\sigma}$ の境界は $\partial\hat{\sigma} = |\hat{A}B| + |\hat{B}C| + |\hat{A}C|$ といいたいところだが...
境界のつながり方を考慮すると $\partial\hat{\sigma} = |\hat{A}B| + |\hat{B}C| + |\hat{C}A|$ が自然

⇒ $|AC|$ と $|CA|$ は集合としては同一であるが, 代数的には向きが異なり,
 $|\hat{C}A| = -|\hat{A}C|$ と考えると都合がよい

k単体の向き

k単体 $\sigma = |A_0 A_1 \cdots A_k|$ の場合:

順序を置換 π によって並べ替えたもの: $\sigma' = |A_{\pi(0)} A_{\pi(1)} \cdots A_{\pi(k)}|$

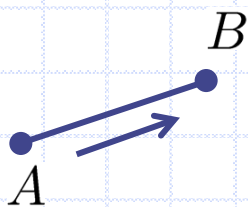
σ と σ' は \mathbb{R}^N 内の部分集合としては同一



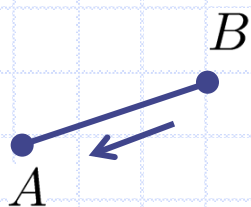
記号化したものの符号は...

$\hat{\sigma}' = \text{sgn}(\pi) \hat{\sigma}$
と定める

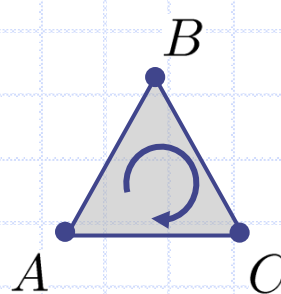
$\text{sgn}(\pi)$: 置換 π の符号 (置換を互換の積で表したときの互換の数の偶奇)



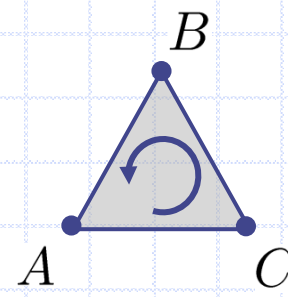
$|\hat{A}B|$



$|\hat{B}A|$



$|\hat{A}BC|$



$|\hat{B}AC|$

境界作用素

2単体 $\sigma = |ABC|$ の境界:

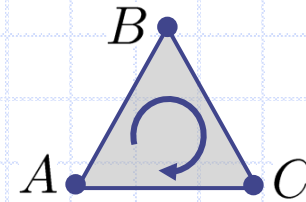
$$\partial\hat{\sigma} = |\hat{A}B| + |\hat{B}C| + |\hat{C}A|$$

$$= |\hat{B}C| - |\hat{A}C| + |\hat{A}B|$$

境界を取り出す操作

取り除くという意味

$$|\hat{A}BC|$$



一般化

k 単体 $\sigma = |A_0A_1 \cdots A_k|$ に対し, その記号化 $\hat{\sigma}$ の境界 $\partial_k \hat{\sigma}$ を

$$\partial_k \hat{\sigma} = \sum_{i=0}^k (-1)^i |\cdots A_{i-1} \hat{A}_{i+1} \cdots|$$

と定める. $\partial_k \hat{\sigma}$ は $(k-1)$ 単体の記号化の1次結合なので, $C_{k-1}(K)$ の元



線型に拡張

線型写像 $\partial_k : C_k(K) \rightarrow C_{k-1}(K)$ ($k = 1, \dots, \dim K$)

境界作用素 (境界準同型写像) という.

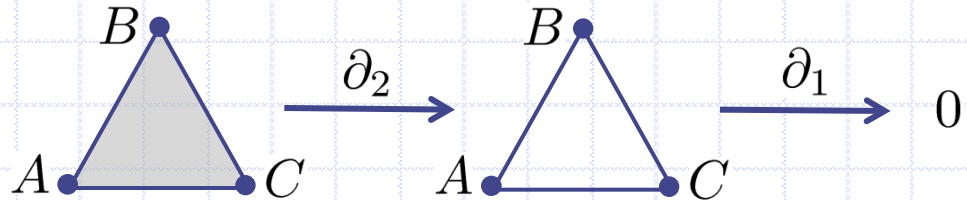
境界作用素の性質

任意の $k = 0, \dots, \dim K$ に対し, 境界作用素 $\partial_{k+1} : C_{k+1}(K) \rightarrow C_k(K)$ と $\partial_k : C_k(K) \rightarrow C_{k-1}(K)$ の合成写像は

$$\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0 \quad \leftarrow \text{「境界の境界をとると0となる」}$$

を満たす. ただし, $C_{-1}(K)$, $C_{\dim K+1}(K)$ はいずれも0だけからなる自明なベクトル空間とする

2単体 $\sigma = |ABC|$ の場合:



3単体 $\sigma = |ABCD|$ の場合:

$$\partial_3 \hat{\sigma} = |\hat{BCD}| - |\hat{ACD}| + |\hat{ABD}| - |\hat{ABC}|$$

$$\partial_2(\partial_3 \hat{\sigma}) = \partial_2(|\hat{BCD}| - |\hat{ACD}| + |\hat{ABD}| - |\hat{ABC}|)$$

$$= (|\hat{CD}| - |\hat{BD}| + |\hat{BC}|) - (|\hat{CD}| - |\hat{AD}| + |\hat{AC}|)$$

$$+ (|\hat{BD}| - |\hat{AD}| + |\hat{AB}|) - (|\hat{BC}| - |\hat{AC}| + |\hat{AB}|) = 0$$

チェイン複体 (鎖複体)

チェイン群, すなわちベクトル空間の列, $\{C_k(K)\}$ とその間の境界作用素

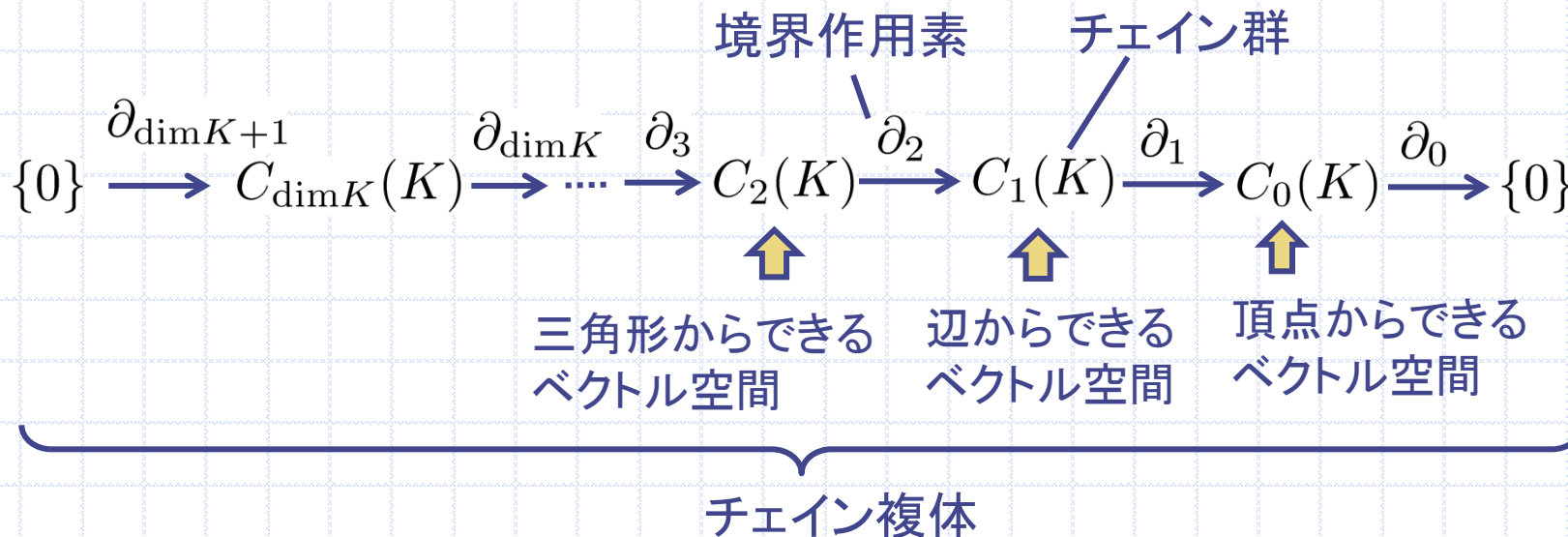
$$\partial_k : C_k(K) \rightarrow C_{k-1}(K) \quad (k = 0, \dots, \dim K)$$

の組が全ての k について性質 $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ を満たすとき, この組

$$C = (C_k, \partial_k)_{k=0, \dots, \dim K}$$

をチェイン複体と呼ぶ. (略して, $C = (C_*, \partial_*)$ と書く)

.....



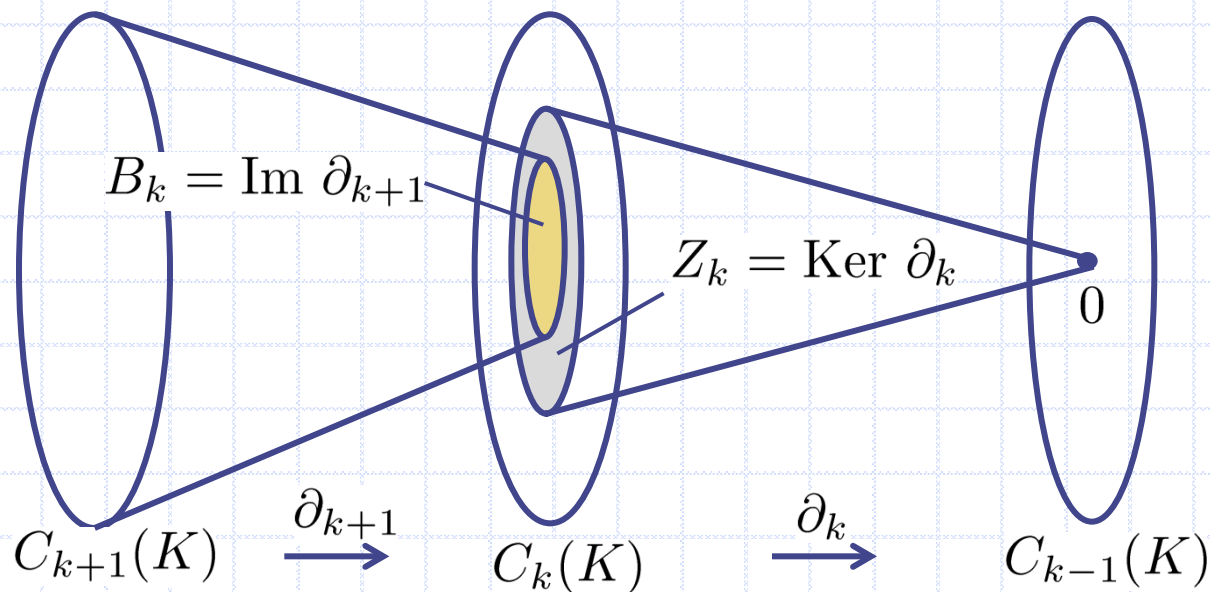
サイクルとバウンダリ

チェイン複体 $\mathcal{C} = (C_*, \partial_*)$ から自然に以下のような部分ベクトル空間ができる

$$Z_k = (\partial_k)^{-1}(0) = \text{Ker } \partial_k$$

$$B_k = \partial_{k+1}(C_{k+1}) = \text{Im } \partial_{k+1}$$

← $\begin{cases} Z_k \text{ の元を } k \text{ サイクルという} \\ B_k \text{ の元を } k \text{ バウンダリという} \end{cases}$



$\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ より $B_k \subset Z_k \subset C_k$ となる

ホモロジー群

チェイン複体 $C = (C_*, \partial_*)$ のホモロジー群とは、商ベクトル空間

$$H_k(C) = \frac{Z_k}{B_k}$$

によって定義されるベクトル空間の列 $H_*(C) = \{H_k(C)\}_{k=0,1,2,\dots}$ のこと

Z_k : 境界がないものたち
 B_k : 1次元高い図形の境界

} この“差”を代数的に抽出

$\frac{Z_k}{B_k}$: 境界がなくかつ1次元高い図形の境界ではないもの

➡ 穴や空洞に対応

商ベクトル空間について(補足)

ベクトル空間 V とその部分ベクトル空間 W を考える.

V の2つの元 v_1, v_2 は $v_1 - v_2 \in W$ のときに同値であると定め,
 V の元 v に対しそれと同値な全ての V の元全体を $[v]$ と書き,
 v の同値類という

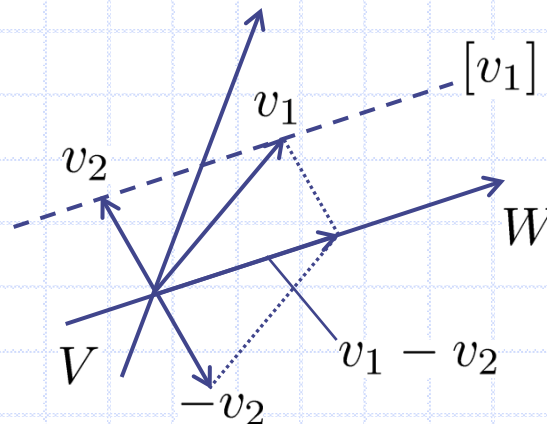


ベクトル空間 V は v の同値類の集まりに類別される

v の同値類の集まりに自然にベクトル空間としての演算を導入したものが商ベクトル空間 V/W

$$\begin{cases} [v] + [v'] = [v + v'] \\ \alpha[v] = [\alpha \cdot v] \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

商ベクトル空間がうまくイメージ出来ない場合,
 V/W は“ V の中での W の補空間”と思うとよい

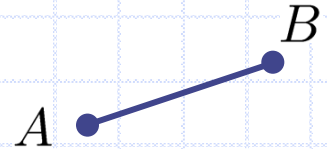


$[v_1]$: v_1 の同値類

v_1 を通り W に平行な
 $\dim W$ 次元アフィン部分空間

1単体のホモロジー

1単体 $\sigma = |AB|$ の定める単体複体 $K(\sigma) = \{|AB|, |A|, |B|\}$



0チェイン群: $C_0(K) = \{\alpha|\hat{A}| + \beta|\hat{B}| \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \longleftarrow \cong \mathbb{R}^2$ 2次元ベクトル空間

1チェイン群: $C_1(K) = \{\gamma|\hat{A}B| \mid \gamma \in \mathbb{R}\} \longleftarrow \cong \mathbb{R}$ 1次元ベクトル空間
 ($k \neq 0, 1$ のとき $C_k(K) = \{0\}$)

同型

境界作用素: $\partial_1(C_1(K)) = \partial_1(\gamma|\hat{A}B|) = \gamma(|\hat{B}| - |\hat{A}|)$
 ($k \neq 1$ のとき $\partial_k = 0$)

サイクル: $Z_k(K) = \begin{cases} C_0(K) & k = 0 \\ \{0\} & k \neq 0 \end{cases}$



ホモロジー群:

バウンダリ: $B_k(K) = \begin{cases} \{\gamma(|\hat{B}| - |\hat{A}|) \mid \gamma \in \mathbb{R}\} & k = 0 \\ \{0\} & k \neq 0 \end{cases}$

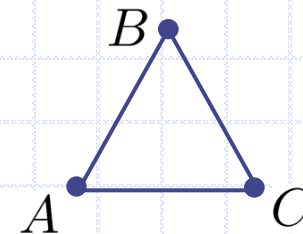
$H_k(K) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ \{0\} & k \neq 0 \end{cases}$

$H_0(K)$ の次元は連結成分の個数を表す

内部を含まない三角形のホモロジー

内部を含まない三角形の定める単体複体

$$K = \{|AB|, |BC|, |CA|, |\hat{A}|, |\hat{B}|, |\hat{C}|\}$$



0チェイン群: $C_0(K) = \{\alpha|\hat{A}| + \beta|\hat{B}| + \gamma|\hat{C}| \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

1チェイン群: $C_1(K) = \{u|\hat{B}\hat{C}| + v|\hat{C}\hat{A}| + w|\hat{A}\hat{B}| \mid u, v, w \in \mathbb{R}\}$

($k \neq 0, 1$ のとき $C_k(K) = \{0\}$)



境界作用素: $\partial_1(C_1(K)) = \partial_1(u|\hat{B}\hat{C}| + v|\hat{C}\hat{A}| + w|\hat{A}\hat{B}|)$

$$= u(|\hat{C}| - |\hat{B}|) + v(|\hat{A}| - |\hat{C}|) + w(|\hat{B}| - |\hat{A}|)$$

$$= (v - w)|\hat{A}| + (w - u)|\hat{B}| + (u - v)|\hat{C}|$$

($k \neq 1$ のとき $\partial_k = 0$)

内部を含まない三角形のホモロジー(続)

$$C_0(K) \cong \mathbb{R}^3 \Rightarrow \alpha|\hat{A}| + \beta|\hat{B}| + \gamma|\hat{C}| \leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$C_1(K) \cong \mathbb{R}^3 \Rightarrow u|\hat{B}\hat{C}| + v|\hat{C}\hat{A}| + w|\hat{A}\hat{B}| \leftrightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

という同一視を行うと

$$\partial_1(C_1(K)) = (v - w)|\hat{A}| + (w - u)|\hat{B}| + (u - v)|\hat{C}| \text{ より}$$

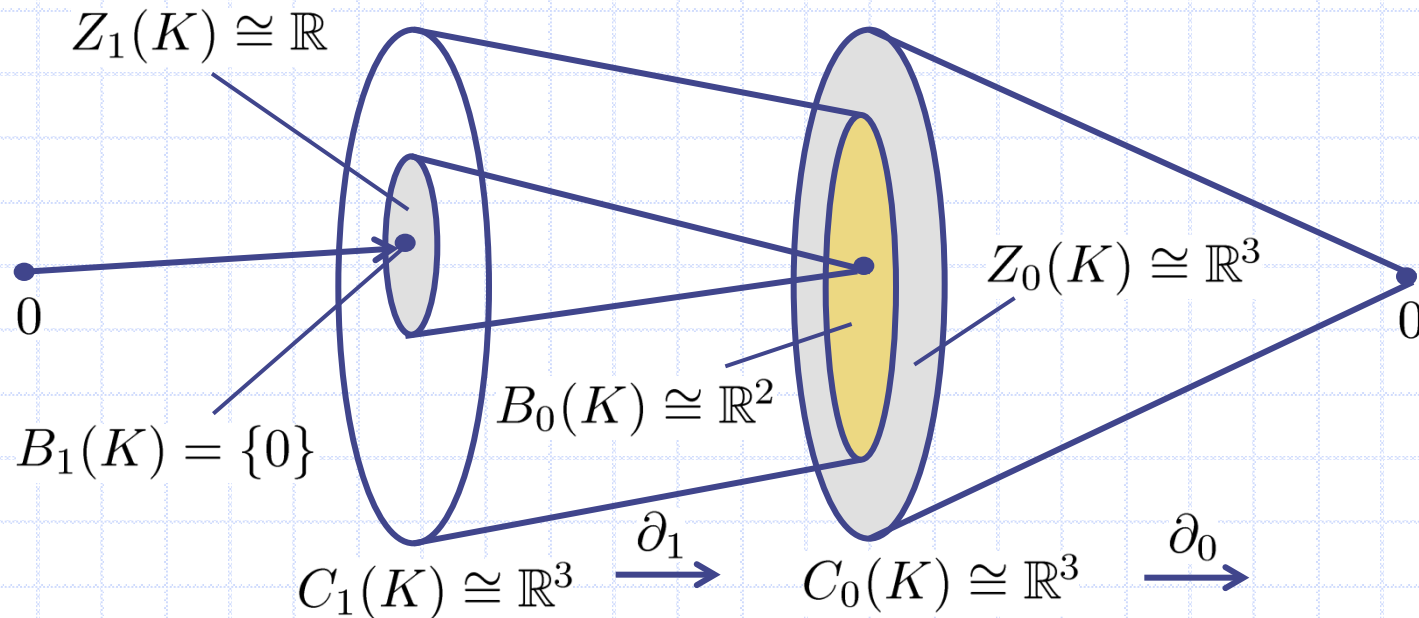
$$\partial_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ とかける}$$

この行列のランクは2で、

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ より } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ すなわち } |\hat{B}\hat{C}| + |\hat{C}\hat{A}| + |\hat{A}\hat{B}| \text{ は}$$

$Z_1(K)$ の基底

内部を含まない三角形のホモロジー(続)



ホモロジー群:

$$H_k(K) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0, 1 \\ \{0\} & k \neq 0, 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} B_1(K) = \{0\} \text{なので } |\hat{BC}| + |\hat{CA}| + |\hat{AB}| \text{ は} \\ H_1(K) \text{ の基底でもある} \end{array}$$

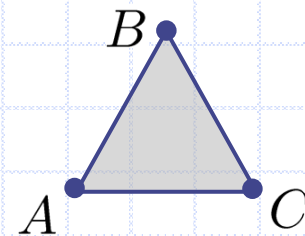
$H_1(K)$ の次元は穴の個数を表す

ホモロジー計算練習問題

- 2単体 $\sigma = |ABC|$ のホモロジー

$$K(\sigma) = \{|ABC|, |AB|, |BC|, |CA|, |A|, |B|, |C|\}$$

$$\text{答え: } H_k(K) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k=0 \\ \{0\} & k \neq 0 \end{cases}$$

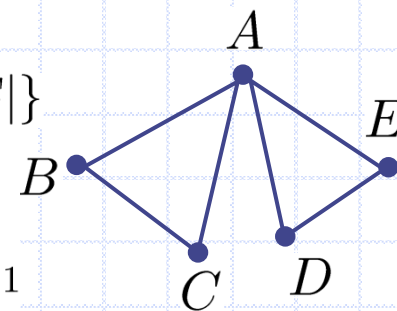


- 内部を含まない2つの三角形の1点和のホモロジー

$$K = \{|AB|, |BC|, |CA|, |AD|, |DE|, |EA|, |A|, |B|, |C|, |D|, |E|\}$$

$$\text{ヒント: } \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ のランク4}$$

$$\text{答え: } H_k(K) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k=0 \\ \mathbb{R}^2 & k=1 \\ \{0\} & k \neq 0, 1 \end{cases}$$

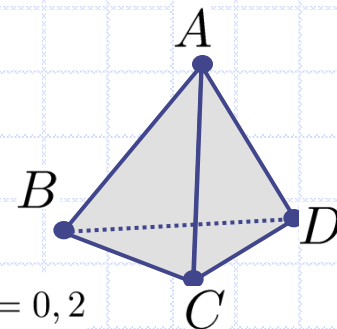


- 内部を含まない四面体のホモロジー

$$K = \{|BCD|, |ACD|, |ABD|, |ABC|, |AB|, |AC|, |AD|, |BC|, |BD|, |CD|, |A|, |B|, |C|, |D|\}$$

$$\text{ヒント: } \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ のランク3}$$

$$\text{答え: } H_k(K) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k=0, 2 \\ \{0\} & k \neq 0, 2 \end{cases}$$



ホモロジー群計算ソフトウェア: CHomP

CHomP (Computational **H**omology **P**roject)

<http://chomp.rutgers.edu/>

計算機を用いたホモロジー群の高速計算
及びその応用を目指したプロジェクト



CHomPソフトウェア

- 単体ホモロジー群, 方体ホモロジー群等を計算するソフトウェア
- bitmap形式の2次元画像データから方体集合表現を出力
- C++言語のプログラムからアクセスするインターフェース
- Unix, Linux, Windows, Macで動作

ホモロジー計算ソフトウェア: CHomP (続)

西浦先生(北大教授)



西浦先生 (bmpファイル)

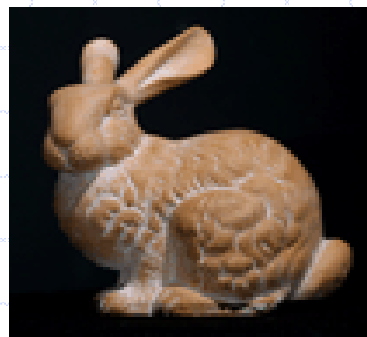
$$H_0(\text{西浦先生}) = \mathbb{Z}^{10}$$

$$H_1(\text{西浦先生}) = \mathbb{Z}^{36}$$

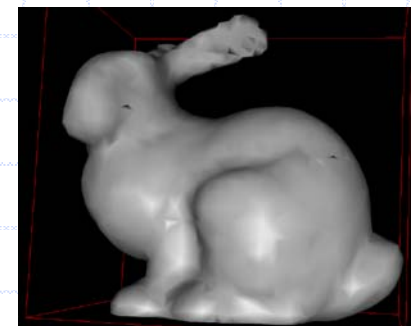
ホモロジー群

Stanford Bunny
(Stanford大学が提供している3D
Scanning Repositoryから)

<http://graphics.stanford.edu/data/3Dscanrep/>



Stanford Bunny



Stanford Bunnyの
多面体近似

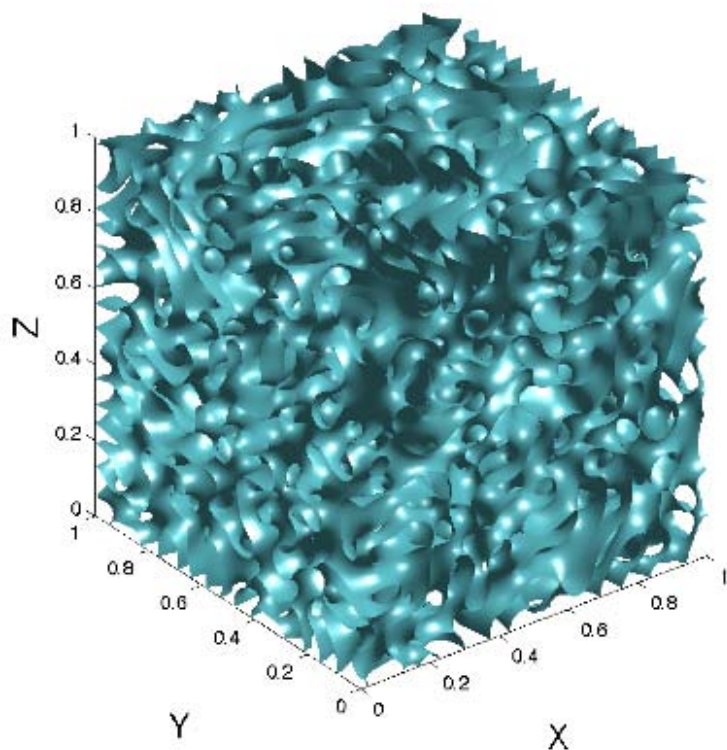
$$H_0 = \mathbb{Z}$$

$$H_1 = \mathbb{Z}^7$$

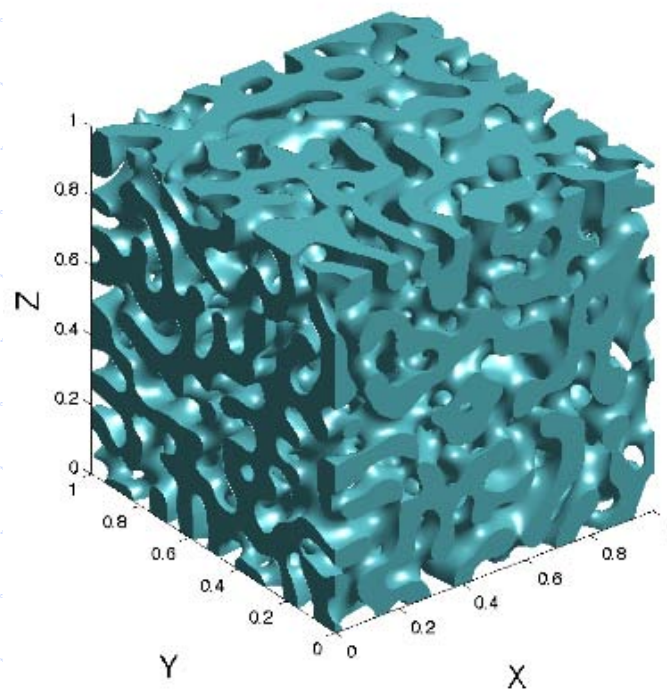
ホモロジー群

三角形分割の際, 7つの
欠陥(穴)が生じているこ
とを示している

ホモロジー計算ソフトウェア: CHomP (続)



$$H_i = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0 \\ \mathbb{Z}^{1705}, & i = 1 \\ 0, & i \neq 0, 1 \end{cases}$$



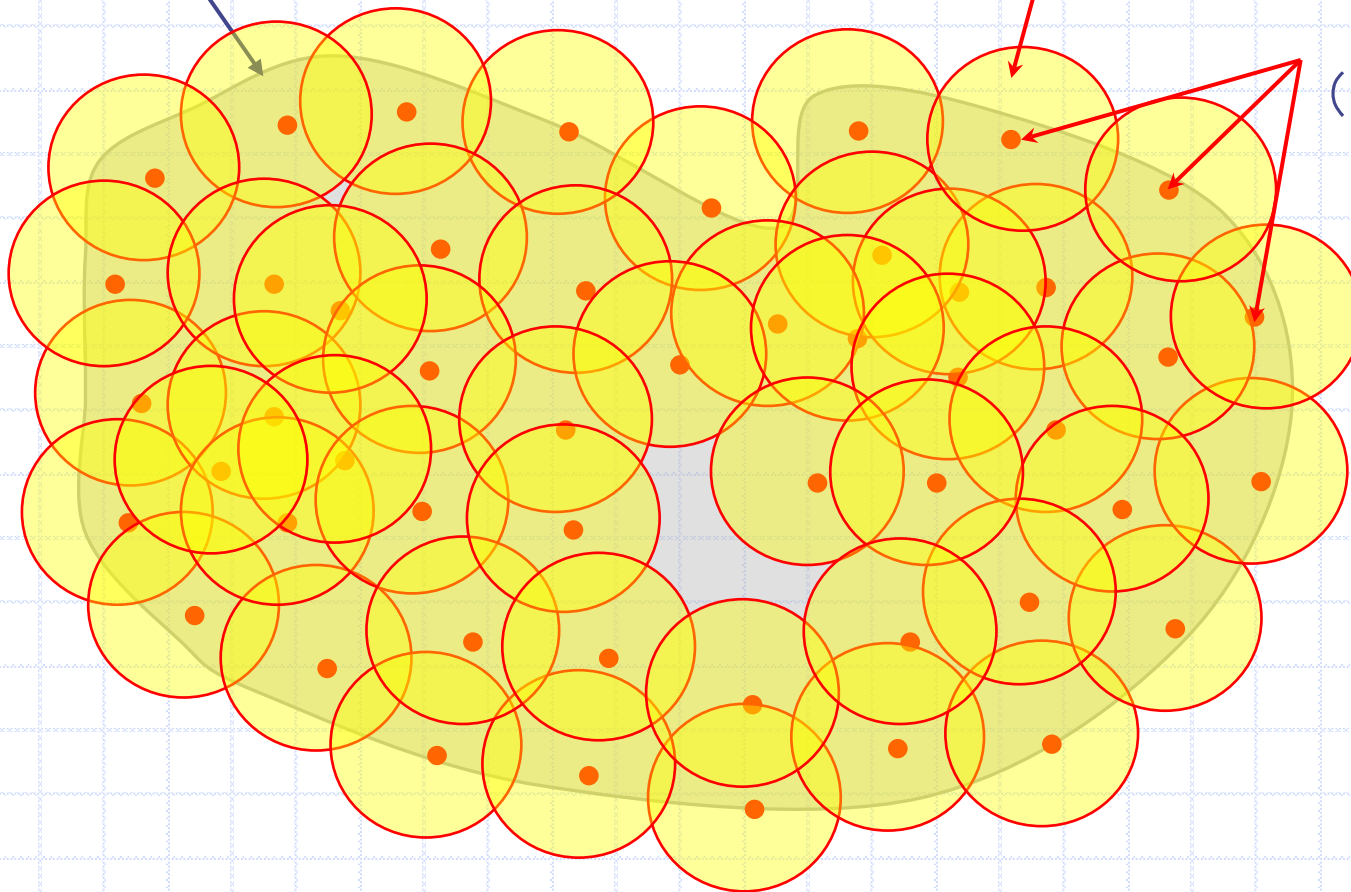
$$H_i = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0 \\ \mathbb{Z}^{847}, & i = 1 \\ 0, & i \neq 0, 1 \end{cases}$$

センサーネットワーク被覆問題

対象とする領域 D

各センサーの計測領域(半径 r_c)

センサー
(位置 $x_i \in D$)



センサーネットワーク被覆問題(続)

被覆問題へのこれまでの取り組み:

- センサーの絶対位置がわかっている
 計算幾何的扱い(ボロノイ図, ドロネー図など)
 携帯の基地局設計などでは有用
 センサーにとって絶対位置の情報は仮定したくない
- センサーが対象領域内で一様に分布している
 確率論的扱い
 一様分布という仮定は強すぎる

Christの発想: 局所的なセンサー間の接続や被覆状況から大域的な情報を抜き出す



R.Ghristらの研究紹介

問題設定

対象領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ はコンパクトかつ連結

境界(フェンス) ∂D は連結かつその上のノードが定める区分線形な線分

$\mathcal{X} := \{x_i \in D \mid i = 1, \dots, N\}$ ノード(センサー)の集合

(A) \mathcal{X}_f : フェンス上のノード

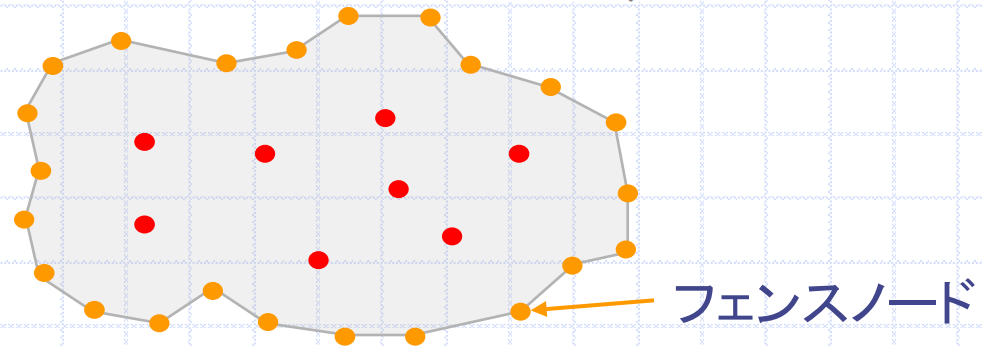
r_b : 各センサーは半径 r_b 円内にある他のセンサーと通信できる

\mathcal{X}_f 上の隣接ノード間距離は r_b 以下

r_c : 各センサーは半径 r_c 円内を計測する. 特に $r_c \geq \frac{r_b}{\sqrt{3}}$ とする

\mathcal{U} : r_c 円板の全てのノードに関する和集合

被覆問題: $D \subset \mathcal{U}$?



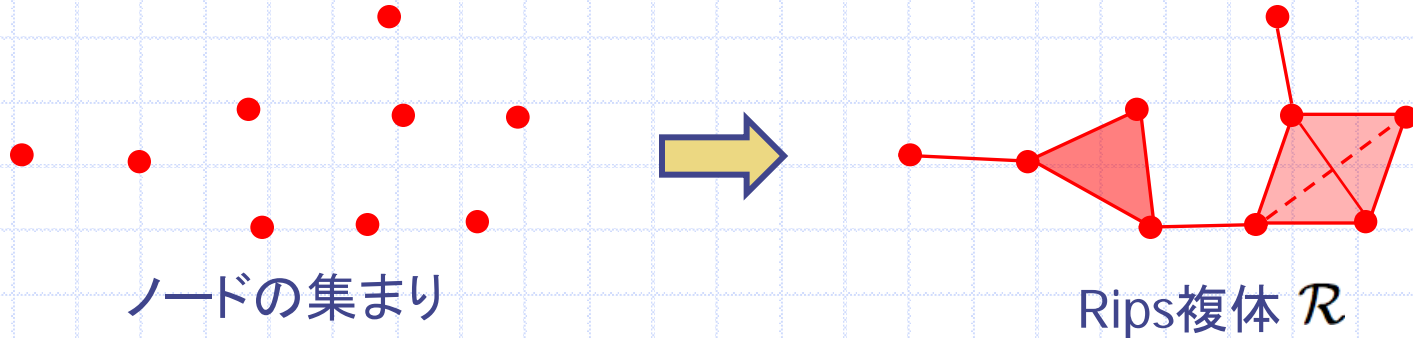
R.Ghristらの研究紹介(続)

Rips複体 \mathcal{R} : ノードと r_b によって定まる単体複体

0単体 $|x_i| \iff$ 全てのノード $x_i, i = 1, \dots, N$

k単体 $|x_0 \cdots x_k| \iff \{x_0, \dots, x_k\}$ の任意の2つのノード間距離が r_b 以下

\mathcal{F} : フェンス(境界)ノードによって定まる1次元部分単体複体



局所的な各センサー間の接続情報のみで構成可能

R.Ghristらの研究紹介(続)

定理1 (V. de Silva and R. Ghrist)

$[\sigma] \in H_2(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ が存在し $\delta_2[\sigma] \neq 0$ ($\in H_1(\mathcal{F})$) となるならば $D \subset \mathcal{U}$ となる. (つまりセンサー達は領域を被覆している)

$$\rightarrow H_2(\mathcal{F}) \rightarrow H_2(\mathcal{R}) \rightarrow H_2(\mathcal{R}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_2} H_1(\mathcal{F}) \rightarrow$$

拡張:

穴があいてる場合の修復方法
省エネルギーモード
ターゲット追跡問題
3次元の被覆問題

(補足)

$H_*(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ は単体複体 \mathcal{R} とその部分複体 \mathcal{F} の対 $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ の相対ホモロジー群と呼ばれ, \mathcal{F} を1点に潰したときの \mathcal{R} のホモロジー群を意味する

R.Ghristらの研究紹介(続)

問題点: 誰がホモロジーを計算するのか?

Ghristの手法では, 局所的な接続の情報を1箇所(中央制御局)に何らかの方法で送り, そこでホモロジー群の計算を行うことになる.



- 長距離or多ホップの通信は電力を消費する.
- ホモロジー群の計算量は2次のオーダー



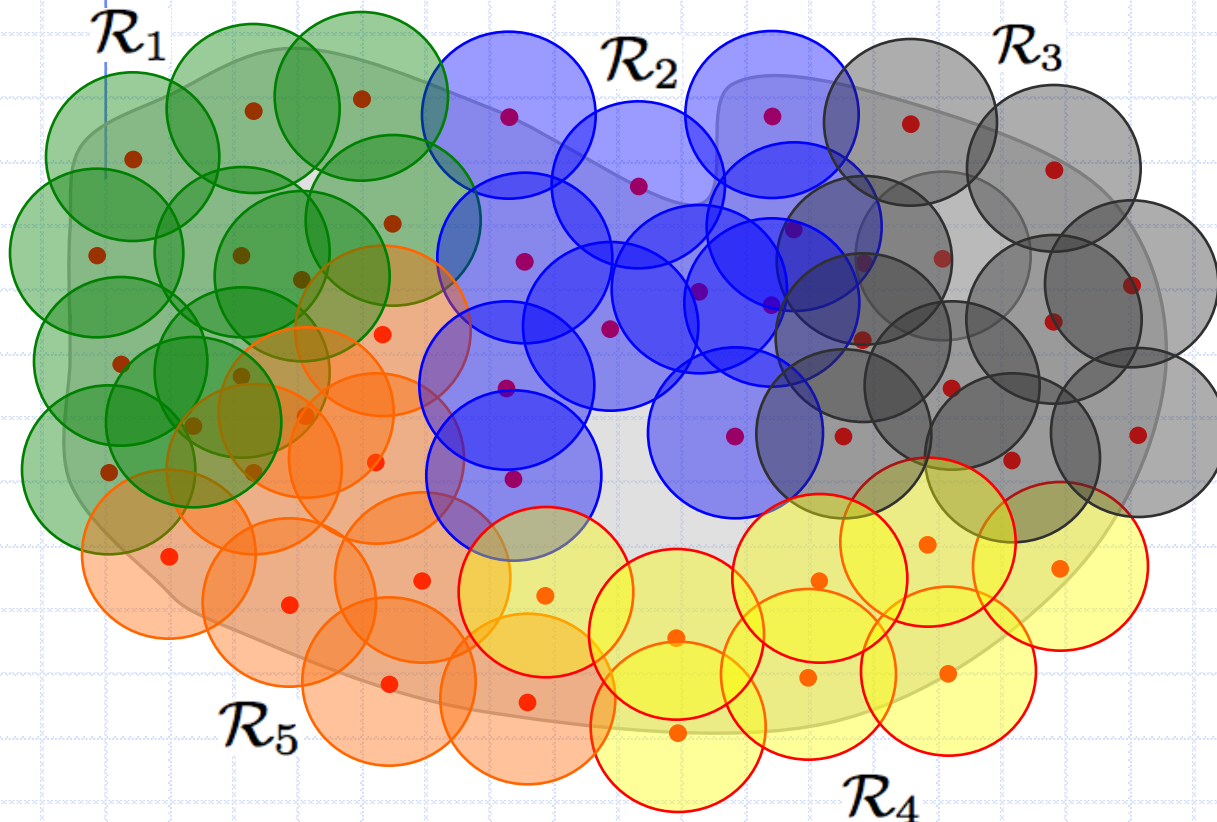
分散型ホモロジー群計算導入の必要性

Mayer-Vietoris完全系列を用いたアルゴリズム(荒井, 林, 平岡)

分散型ホモロジー計算アルゴリズム

Mayer-Vietoris完全系列

$$\rightarrow H_k(\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2) \rightarrow H_k(\mathcal{R}_1) \oplus H_k(\mathcal{R}_2) \rightarrow H_k(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \rightarrow H_{k-1}(\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2) \rightarrow$$



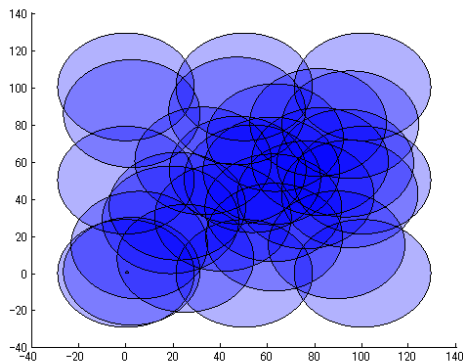
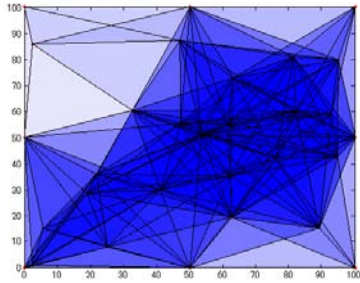
- Rips複体 \mathcal{R} の分割

$$\mathcal{R} = \bigcup_{i=1}^K \mathcal{R}_i$$

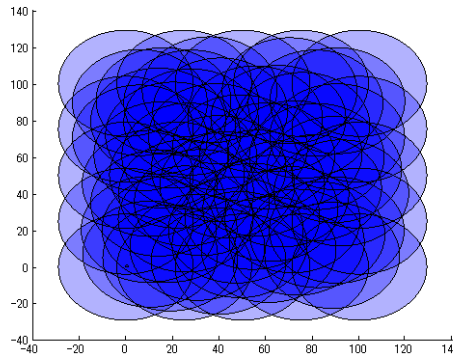
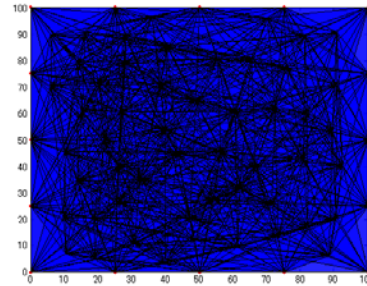
- 各部分Rips複体で $H_*(\mathcal{R}_i), H_*(\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j)$ を並列的に計算
- Mayer-Vietoris完全系列から $H_*(\mathcal{R})$ を計算

分散型ホモロジー計算アルゴリズム(続)

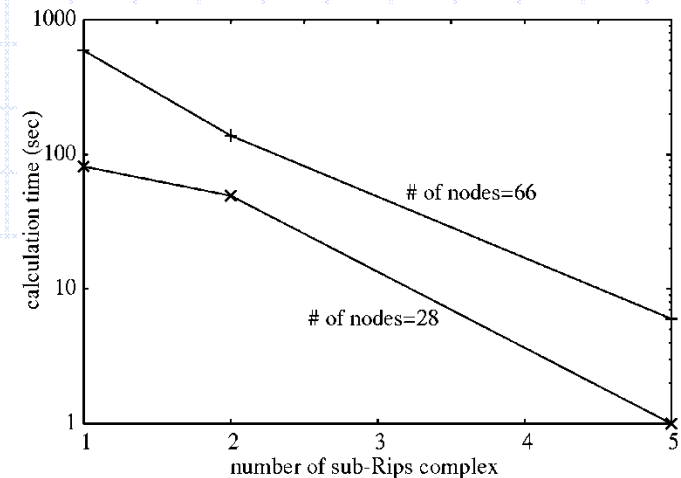
ノード数28個のときの
Rips複体と被覆の様子



ノード数66個のときの
Rips複体と被覆の様子



計算実行時間の例



参考文献

- ◆ 國府寛司, “計算ホモロジーへの誘い,” 応用数理サマーセミナー2007計算ホモロジーとその応用, pp. 1-36, 2007. (応用数理Vol.18 No.1, 2008)
- ◆ 平岡裕章, 第1回TIN (Topology, Informatics, and Network)勉強会講義ノート, 2007.
- ◆ 柘田幹也, 代数的トポロジー, 講座<数学の考え方>15, 朝倉書店, 2002.
- ◆ 瀬山士郎, トポロジー: 柔らかい幾何学, 日本評論社, 2003.
- ◆ 田村一郎, トポロジー, 岩波全書, 岩波書店, 1972.
- ◆ 野口廣, トポロジー 基礎と方法, ちくま学芸文庫, 筑摩書房, 2007.
- ◆ 森毅, 位相のころ, ちくま学芸文庫, 筑摩書房, 2006.
- ◆ 田中利史, 村上齊, トポロジー入門, SGCライブラリ42, サイエンス社, 2005.
- ◆ 谷村省吾, 理工系のためのトポロジー・圏論・微分幾何, SGCライブラリ52, サイエンス社, 2006.
- ◆ 川久保勝夫, トポロジーの発想, ブルーボックス, 講談社, 1995.
- ◆ T. Kaczynski, K. Mischaikow and M. Mrozek, *Computational Homology*, Applied Mathematical Sciences Vol. 157, Springer, 2004.
- ◆ V. de Silva and R. Ghrist, “Coordinate-free coverage in sensor networks with controlled boundaries via homology,” Intl. J. Robotics Research, vol. 25, pp. 1205-1222, 2006.
- ◆ Z. Arai, K. Hayashi and Y. Hiraoka, “Mayer-Vietories sequences and coverage problems in sensor networks,” preprint.