

通信のための信号処理の基礎

林 和則[†]

[†] 京都大学大学院情報学研究科 〒 606-8501 京都市左京区吉田本町

E-mail: †kazunori@i.kyoto-u.ac.jp

あらまし 無線通信システムで広く用いられてきた様々な信号処理技術を光通信システムに応用する試みがなされている。本稿では、それらの手法を効率的かつ体系的に理解するために、通信システムにおける典型的な問題として線形回帰の問題をとりあげ、それに対する様々な信号処理手法の考え方について説明する。さらに、それらの手法の具体的な通信の問題への応用例についても紹介する。

キーワード ZF, 最小ノルム解, MMSE, 最尤推定, 最大比合成, 圧縮センシング

Fundamentals of Signal Processing for Communications Systems

Kazunori HAYASHI[†]

[†] Graduate School of Informatics, Kyoto University,
Yoshida Honmachi Sakyo-ku, Kyoto, 606-8501, JAPAN

E-mail: †kazunori@i.kyoto-u.ac.jp

Abstract Various signal processing schemes, which have been originally developed for wireless communications systems, are extensively applied for optical communications systems. In order to understand fundamental ideas of those schemes efficiently in a systematic manner, we explain some basic signal processing schemes for a linear regression model, which is considered as a typical problem in communications systems.

Key words ZF (zero-forcing), minimum-norm solution, MMSE (minimum mean-square-error), maximum likelihood, maximum ratio combining, compressed sensing

1. はじめに

現代の無線通信システムは、非常に高度な信号処理技術がその様々な構成要素に適用されることで成り立っている。このような無線通信のための信号処理技術を、光通信システムに応用する試みが盛んになされている。個々の光通信の問題に対して適切な信号処理手法を適用するためには、どのような無線通信の問題に対してどのような信号処理手法が存在するかを知る必要があるが、複雑化した現在の無線通信システムにあっては、これらを網羅的に把握することはその分野の専門家であっても非常に困難である。また、無線通信の教科書や解説では、多くの場合、通信路等化や通信路推定といった問題毎やシステムの構成要素毎に説明がなされていることも、様々な信号処理手法に対する統一的理解を得ることを困難にしていると考えられる。

本稿では、無線通信や信号処理の非専門家や初学者を対象として、典型的な問題に対する典型的な信号処理手法について解説することで、現在の無線通信システムで用いられている最先端の信号処理技術を理解するために必要な最低限の知識を、効

率的かつ体系的に提供することを目的としている。具体的には、興味のある未知ベクトルに対して既知の行列で線形観測を行ったときに、白色の加法性雑音をとまって観測されるベクトルから未知ベクトルを推定する問題を考える。これは素朴な線形回帰モデルであるが、通信路等化や通信路推定、MIMO (multi-input multi-output) 通信、ダイバーシティ、到来方向推定、干渉除去、ユーザー分離など、非常に多くの通信のための信号処理の問題を表現することが可能である。このモデルに基づいて、ZF (zero-forcing) 推定や最小ノルム解、MMSE (minimum mean-square-error) 推定、最尤推定、最大比合成といった古典的な推定法から圧縮センシングといった比較的新しい手法まで説明する。また、アレイ信号処理でよく利用される部分空間法についても説明する。

以下では、次のような表記を用いる。ボールド体の小文字は列ベクトルを、ボールド体の大文字は行列をそれぞれ表す。行列、ベクトルの転置の操作は^T、共役転置は^Hとする。diag[$a_1 \cdots a_N$] は a_1, \dots, a_N を対角成分にもつ $N \times N$ の対角行列を表し、tr{**A**} は行列 **A** のトレースを、det{**A**} は行列 **A** の行列式を表す。単位行列は **I**、零行列は **0** とし、文脈から

サイズが分かる場合には特に明記しない． $\|\mathbf{a}\|_p$ ($p \geq 1$) はベクトル \mathbf{a} の ℓ_p -ノルムであり，

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1)$$

で定義される．また， $\|\mathbf{a}\|_0$ はベクトル \mathbf{a} の非零要素数を意味し， ℓ_0 -ノルムと呼ぶことにする．本稿で使用する複素数と複素ベクトル，複素行列に関する偏微分について，基本的な計算規則を付録にまとめているので適宜参照されたい．

2. 問題設定

本稿では，興味のある未知ベクトル $\mathbf{x} = [x_1 \cdots x_N]^T \in \mathbb{C}^N$ に対して，既知の行列 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_N] \in \mathbb{C}^{M \times N}$ を用いて線形観測を行なったときに，得られる観測ベクトル $\mathbf{y} = [y_1 \cdots y_M]^T \in \mathbb{C}^M$ から \mathbf{x} を推定する問題を考える．すなわち，

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (2)$$

において， \mathbf{y} と \mathbf{A} から \mathbf{x} を推定する問題である．ここで， $\mathbf{v} = [v_1 \cdots v_M]^T \in \mathbb{C}^M$ は加法性白色雑音ベクトルとする．ただし，信号処理の手法によっては目的が \mathbf{A} の推定であったり，複素数でない成分が仮定されたりするため，注意されたい．また，手法によってこれらのベクトルを確率的に取扱う場合や，確定的に取扱う場合があるが，確率的に扱う場合には， \mathbf{y} ， \mathbf{x} ， \mathbf{v} の相関行列をそれぞれ， $\mathbf{R}_y = E[\mathbf{y}\mathbf{y}^H]$ ， $\mathbf{R}_x = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H]$ ， $\mathbf{R}_v = E[\mathbf{v}\mathbf{v}^H] = \sigma_v^2 \mathbf{I}$ とする．

3. 種々の信号処理手法

ここでは，前節で定義した問題に対する典型的な信号処理手法について説明する．

3.1 ZF 推定

最もシンプルな推定法として，ZF 推定がある．これは，雑音が無い場合に誤差無く \mathbf{x} を推定できる手法であり， \mathbf{x} の推定値は

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{zf} &= \mathbf{W}_{zf}^H \mathbf{y} \\ &= \mathbf{x} + \mathbf{W}_{zf}^H \mathbf{v} \end{aligned} \quad (3)$$

で与えられる．ここで \mathbf{W}_{zf}^H は ZF 推定を与える $N \times M$ のウェイト行列であり，上述の ZF 推定の性質から

$$\mathbf{W}_{zf}^H \mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (4)$$

を満足する．従って， \mathbf{A} が正則な正方行列 ($M = N$) の場合には

$$\mathbf{W}_{zf}^H = \mathbf{A}^{-1} \quad (5)$$

と一意に定まる．

一方， \mathbf{A} が $M > N$ の場合には，一般に (4) から \mathbf{W}_{zf} が一意に定まらないため，(4) を満足するウェイト行列のうちで推定値 (3) の信号対雑音電力比 (SNR: signal-to-noise power ratio) を

最大にするものを \mathbf{W}_{zf} として選ぶことにする．ここで，(3) の信号成分はウェイト行列に依存せず，また，雑音成分の電力は

$$\begin{aligned} E \left[(\mathbf{W}_{zf}^H \mathbf{v})^H \mathbf{W}_{zf}^H \mathbf{v} \right] &= \text{tr} \left\{ \mathbf{W}_{zf}^H E[\mathbf{v}\mathbf{v}^H] \mathbf{W}_{zf} \right\} \\ &= \sigma_v^2 \text{tr} \left\{ \mathbf{W}_{zf}^H \mathbf{W}_{zf} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

で与えられることから，SNR を最大にする \mathbf{W}_{zf} は

$$\mathbf{W}_{zf} = \arg \min_{\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{M \times N}} \text{tr} \left\{ \mathbf{W}^H \mathbf{W} \right\} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{W}^H \mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (7)$$

なる最適化問題を解くことで得られる．ラグランジュ関数を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{zf}(\mathbf{W}) &= \text{tr} \left\{ \mathbf{W}^H \mathbf{W} \right\} + \sum_{n=1}^N \phi_n^H (\mathbf{W}^H \mathbf{a}_n - \mathbf{e}_n) \\ &= \text{tr} \left\{ \mathbf{W}^H \mathbf{W} \right\} + \sum_{n=1}^N \text{tr} \left\{ (\mathbf{W}^H \mathbf{a}_n - \mathbf{e}_n) \phi_n^H \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

と定義すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{zf}(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}^H} &= \mathbf{W} + \sum_{n=1}^N \mathbf{a}_n \phi_n^H \\ &= \mathbf{W} + \mathbf{A} \Phi^H \end{aligned} \quad (9)$$

となる．ただし， ϕ_n はラグランジュ乗数からなる N 次元列ベクトルであり， \mathbf{e}_n は n 番目の成分のみが 1 で他が 0 の N 次元列ベクトル， $\Phi = [\phi_1 \cdots \phi_N]$ である．さらに， $\frac{\partial \mathcal{L}_{zf}(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}^H} = \mathbf{0}$ より $\mathbf{W}_{zf} = -\mathbf{A} \Phi^H$ となり，これを (7) の制約式に代入して， \mathbf{A} が列フルランクと仮定すると

$$\Phi = -(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \quad (10)$$

を得る．従って，

$$\mathbf{W}_{zf}^H = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \quad (11)$$

となる．この式で $M = N$ とすると $\mathbf{W}_{zf}^H = \mathbf{A}^{-1}$ となり，(5) に一致することから，これは $M = N$ の場合にも有効である．

ZF 推定は文脈によって最小 2 乗推定とも呼ばれる．これは

$$\hat{\mathbf{x}}_{ls} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 \quad (12)$$

なる最適化問題を考えると，

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 &= (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y})^H (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= \mathbf{x}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \mathbf{A}^H \mathbf{y} - \mathbf{y}^H \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{y}^H \mathbf{y} \end{aligned}$$

となることから

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^H} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 = \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{A}^H \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (13)$$

を解くことで，ZF 推定と同じ推定値

$$\hat{\mathbf{x}}_{ls} = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{y} \quad (14)$$

が得られるからである．

ZF 推定は希望信号成分を忠実に再現することを優先した推定法であるため，(7) のように雑音電力を抑えるようなウェイ

ト行列を選択していても, \mathbf{A} の性質によっては雑音成分の影響で推定値が大きく劣化してしまうことがある. この問題は, ZF 推定の雑音強調 (noise enhancement) として知られている. ZF 推定値の雑音成分の電力は, (6) に (11) を代入することで

$$\sigma_v^2 \text{tr} \left\{ \mathbf{W}_{zf}^H \mathbf{W}_{zf} \right\} = \sigma_v^2 \text{tr} \left\{ (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \right\} \quad (15)$$

となる. \mathbf{A} が列フルランクとすると, その特異値分解は

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{\Xi} \\ \mathbf{0}_{(M-N) \times N} \end{bmatrix} \mathbf{V}^H \quad (16)$$

で与えられる. ただし, $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{M \times M}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ はユニタリ行列, $\mathbf{\Xi}$ は \mathbf{A} の特異値からなる対角行列 $\mathbf{\Xi} = \text{diag}[\xi_1 \cdots \xi_N]$ である. このとき, $\mathbf{A}^H \mathbf{A} = \mathbf{V} \mathbf{\Xi}^2 \mathbf{V}^H$ となるので, $(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{V} \mathbf{\Xi}^{-2} \mathbf{V}^H$ である. 従って, 雑音電力は

$$\sigma_v^2 \text{tr} \left\{ \mathbf{W}_{zf}^H \mathbf{W}_{zf} \right\} = \sigma_v^2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{|\xi_n|^2} \quad (17)$$

となる. これより, \mathbf{A} の特異値 ξ_n に一つでも 0 に近いものがあれば, 推定値中の雑音電力が非常に大きくなってしまふことが分かる.

3.2 最小ノルム解

$M < N$ の場合には, (4) を満足する \mathbf{W}_{zf} が存在しないため ZF 推定が行えない. これは, $M < N$ の場合には $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ を満足する \mathbf{x} が無限に存在し, 雑音が無い場合であっても線形観測された真の \mathbf{x} を \mathbf{y} と \mathbf{A} から特定できないためである. このような場合によく用いられるのが, 正則化と呼ばれるアプローチである. 正則化では $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ を満足する \mathbf{x} のうちそのノルムが最小のものを解として選択する (最小ノルム解). 例えば, ノルムとして ℓ_2 -ノルムを採用すると, 最小ノルム解は

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{mn}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N} \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (18)$$

を解くことで与えられる. ラグランジュ関数を

$$\mathcal{L}_{\text{mn}}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2^2 + (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y})^H \boldsymbol{\phi} \quad (19)$$

とすると, $\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{mn}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^H} = \mathbf{0}$ より $\hat{\mathbf{x}}_{\text{mn}} = -\mathbf{A}^H \boldsymbol{\phi}$ となり, これを制約式に代入して, \mathbf{A} が行フルランクと仮定すると

$$\boldsymbol{\phi} = -(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)^{-1} \mathbf{y} \quad (20)$$

となる. これより,

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{mn}} = \mathbf{A}^H (\mathbf{A}\mathbf{A}^H)^{-1} \mathbf{y} \quad (21)$$

を得る.

3.3 MMSE 推定

ZF 推定はノイズの影響を直接考慮していないため雑音強調という問題があったが, これに対処するために MMSE 推定が広く用いられている. MMSE 推定には, 非線形演算も許す一般の MMSE 推定と線形演算のみよる線形 MMSE 推定があり, よく用いられるのは後者であるが, ここでは一般の MMSE 推定についても簡単に説明する.

一般の MMSE 推定において, ベクトル値の関数 f を用いて

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{mmse}} = f(\mathbf{y}) \quad (22)$$

によって推定値を与えるとすると, f は

$$J_{\text{mmse}}[f] = E \left[\|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{x}\|_2^2 | \mathbf{y} \right] \quad (23)$$

を最小にするように決定される. ここで, \mathbf{y} が与えられたときの \mathbf{x} の条件付き確率密度関数を $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ とし, \mathbf{y} に関する \mathbf{x} の条件付き期待値を

$$\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = E[\mathbf{x}|\mathbf{y}] = \int \mathbf{x} p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x} \quad (24)$$

と定義すると^(注1),

$$\begin{aligned} J_{\text{mmse}}[f] &= E \left[\|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{x}\|_2^2 | \mathbf{y} \right] \\ &= E \left[\|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) + \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) - \mathbf{x}\|_2^2 | \mathbf{y} \right] \\ &= \|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\|_2^2 + E \left[\|\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) - \mathbf{x}\|_2^2 | \mathbf{y} \right] \\ &\quad + \{\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\}^H E \left[\{\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) - \mathbf{x}\} | \mathbf{y} \right] \\ &\quad + E \left[\{\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) - \mathbf{x}\}^H | \mathbf{y} \right] \{\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\} \\ &= \|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\|_2^2 + E \left[\|\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) - \mathbf{x}\|_2^2 | \mathbf{y} \right] \\ &\geq E \left[\|\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) - \mathbf{x}\|_2^2 | \mathbf{y} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

となり, 等号成立は ($\hat{\mathbf{x}}_{\text{mmse}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$) のときである. 従って, 一般の MMSE 推定は条件付き期待値 $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ によって与えられる.

各ベクトルの平均値が $\mathbf{0}$ のとき, 線形 MMSE 推定は行列 $\mathbf{W}_{\text{lmmse}}$ を用いて

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{lmmse}} = \mathbf{W}_{\text{lmmse}}^H \mathbf{y} \quad (26)$$

で与えられる. ここで, $\mathbf{W}_{\text{lmmse}}$ は

$$\mathbf{W}_{\text{lmmse}} = \arg \min_{\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{M \times N}} E \left[\|\mathbf{W}^H (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}) - \mathbf{x}\|_2^2 \right] \quad (27)$$

によって決定される.

$$\begin{aligned} J_{\text{lmmse}}(\mathbf{W}) &= E \left[\|\mathbf{W}^H (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}) - \mathbf{x}\|_2^2 \right] \\ &= E \left[(\mathbf{W}^H \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{W}^H \mathbf{v} - \mathbf{x})^H (\mathbf{W}^H \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{W}^H \mathbf{v} - \mathbf{x}) \right] \\ &= E \left[\text{tr} \{ (\mathbf{W}^H \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{W}^H \mathbf{v} - \mathbf{x}) (\mathbf{W}^H \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{W}^H \mathbf{v} - \mathbf{x})^H \} \right] \\ &= \text{tr} \left\{ \mathbf{W}^H \mathbf{A} E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H] \mathbf{A}^H \mathbf{W} \right\} + \text{tr} \left\{ \mathbf{W}^H \mathbf{A} E[\mathbf{x}\mathbf{v}^H] \mathbf{W} \right\} \\ &\quad - \text{tr} \left\{ \mathbf{W}^H \mathbf{A} E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H] \right\} + \text{tr} \left\{ \mathbf{W}^H E[\mathbf{v}\mathbf{x}^H] \mathbf{A}^H \mathbf{W} \right\} \\ &\quad + \text{tr} \left\{ \mathbf{W}^H E[\mathbf{v}\mathbf{v}^H] \mathbf{W} \right\} - \text{tr} \left\{ \mathbf{W}^H E[\mathbf{v}\mathbf{x}^H] \right\} \\ &\quad - \text{tr} \left\{ E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H] \mathbf{A}^H \mathbf{W} \right\} - \text{tr} \left\{ E[\mathbf{x}\mathbf{v}^H] \mathbf{W} \right\} + \text{tr} \left\{ E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H] \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ \mathbf{W}^H \mathbf{A} \mathbf{R}_x \mathbf{A}^H \mathbf{W} \right\} - \text{tr} \left\{ \mathbf{W}^H \mathbf{A} \mathbf{R}_x \right\} + \sigma_v^2 \text{tr} \left\{ \mathbf{W}^H \mathbf{W} \right\} \\ &\quad - \text{tr} \left\{ \mathbf{R}_x \mathbf{A}^H \mathbf{W} \right\} + \text{tr} \left\{ \mathbf{R}_x \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

(注1): \mathbf{x} が離散確率変数のときは適宜修正する

となることから,

$$\frac{\partial J_{\text{immse}}(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}^H} = \mathbf{A}\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H\mathbf{W} - \mathbf{A}\mathbf{R}_x + \sigma_v^2\mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (29)$$

を解いて

$$\mathbf{W}_{\text{immse}}^H = \mathbf{R}_x\mathbf{A}^H \left(\mathbf{A}\mathbf{R}_x\mathbf{A}^H + \sigma_v^2\mathbf{I} \right)^{-1} \quad (30)$$

を得る.

一般に線形 MMSE 推定値は最小分散推定値 (一般の MMSE 推定値) とは一致しないが, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) の結合分布がガウス分布の場合にはこれらが一致する [1].

3.4 最尤推定

\mathbf{x} の各成分が有限のシンボル集合 S から生成されるとする. すなわち $\mathbf{x} \in S^N$ である. 観測 \mathbf{y} が得られたとき, \mathbf{x} の推定値として選んだ任意の $\hat{\mathbf{x}} \in S^N$ が真の \mathbf{x} と一致する確率は $P(\hat{\mathbf{x}}|\mathbf{y})$ であり, これは事後確率と呼ばれる. 従って, 判定が正しい確率を最大にするような, 言い換えると, 誤り確率が最小になるような判定ルールは, 事後確率を最大にする $\hat{\mathbf{x}} \in S^N$ を選択すること, すなわち

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{map}} = \arg \max_{\mathbf{x} \in S^N} P(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \quad (31)$$

である. これは最大事後確率推定と呼ばれ, 誤り確率を最小にするという意味で最適な検出法である.

一方, ベイズの定理を用いると, 事後確率は

$$P(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x})P(\mathbf{x})}{p(\mathbf{y})} \quad (32)$$

と書き直せる. ここで, \mathbf{x} の候補が同様に確からしく, $P(\mathbf{x})$ が一様分布であるとすると, 事後確率を最大化する問題は

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{ml}} = \arg \max_{\mathbf{x} \in S^N} p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \quad (33)$$

に帰着される. これは尤度 $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ を最大化する問題であることから, 最尤推定と呼ばれる.

線形観測モデル (2) において, \mathbf{v} の各成分が独立同一分布に従う複素ガウス雑音であるとすると, 尤度関数は

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^M \det\{\mathbf{R}_v\}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2}{\sigma_v^2}\right) \quad (34)$$

となることから, 最尤推定の問題は

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{ml}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in S^N} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \quad (35)$$

と書き直せる. これは, 加法的雑音がガウス雑音の場合には, 最尤推定は受信信号からのユークリッド距離が最小となる $\mathbf{A}\mathbf{x}$ を見つけ出す問題に帰着されることを意味する. この場合, 評価関数が単純化されるが, S の要素数を $|S|$ とすると評価すべき候補数は $|S|^N$ であり, N が大きい場合には実現が困難である. このため, 様々な計算量削減法が提案されているが, 一般に最尤推定に基づく手法は, その良好な特性と引き換えに要求演算量が非常に大きい.

3.5 最大比合成

同一の信号に対する複数の観測が得られたときに, これらの観測をどのように利用 (合成) するとよいかという問題に出くわすことがある (特にダイバーシティなど). 具体的には, ここでは (2) の特別な場合として

$$\mathbf{y} = \mathbf{a}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (36)$$

を考える. ただし, $x \in \mathbb{C}$, $\mathbf{a} = [a_1 \cdots a_M]^T \in \mathbb{C}^M$ である. 素朴な方法としては, y_1, \dots, y_M のうち最も SNR の高いものだけを利用する方法 (選択合成) や, y_1, \dots, y_M を同じ重みで足し合わせて合成する方法 (等利得合成) があるが, よく用いられるのは合成後の SNR が最大になるように重み付けをして足し合わせる最大比合成である.

最大比合成の重みベクトルを \mathbf{w}_{mrc} とすると, 合成後の信号は

$$\begin{aligned} \hat{x}_{\text{mrc}} &= \mathbf{w}_{\text{mrc}}^H \mathbf{y} \\ &= \mathbf{w}_{\text{mrc}}^H \mathbf{a}\mathbf{x} + \mathbf{w}_{\text{mrc}}^H \mathbf{v} \end{aligned} \quad (37)$$

で与えられる. 2 行目右辺第 1 項が信号成分, 第 2 項が雑音成分を表すため, 合成後の SNR は

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{mrc}} &= \frac{E[|\mathbf{w}_{\text{mrc}}^H \mathbf{a}\mathbf{x}|^2]}{E[|\mathbf{w}_{\text{mrc}}^H \mathbf{v}|^2]} \\ &= \frac{\sigma_x^2 \mathbf{w}_{\text{mrc}}^H \mathbf{a}\mathbf{a}^H \mathbf{w}_{\text{mrc}}}{\sigma_v^2 \mathbf{w}_{\text{mrc}}^H \mathbf{w}_{\text{mrc}}} \end{aligned} \quad (38)$$

となる. ただし, $E[|x|^2] = \sigma_x^2$ としている.

ここで, 任意の固有方程式 $\mathbf{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$ について考える. 両辺に左から \mathbf{w}^H をかけると, $\mathbf{w}^H \mathbf{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}^H \mathbf{w}$ となることから, 行列 \mathbf{A} の任意の固有値は $\lambda = \frac{\mathbf{w}^H \mathbf{A}\mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{w}}$ なる形 (レイリー商と呼ばれる) で表現されることが分かる.

いま, (38) より合成後の SNR が行列 $\mathbf{a}\mathbf{a}^H$ のレイリー商 (の定数倍) として表現されていることから, これを最大にする \mathbf{w}_{mrc} は $\mathbf{a}\mathbf{a}^H$ の最大固有値に対応する固有ベクトルによって与えられる. さらに, $\mathbf{a}\mathbf{a}^H$ はランク 1 の行列であることから

$$\mathbf{w}_{\text{mrc}} = \mathbf{a} \quad (39)$$

とすれば良いことが直ちに分かる. このとき,

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{mrc}} &= \frac{\sigma_x^2 \mathbf{a}^H \mathbf{a}\mathbf{a}^H \mathbf{a}}{\sigma_v^2 \mathbf{a}^H \mathbf{a}} \\ &= \frac{\sigma_x^2 \mathbf{a}^H \mathbf{a}}{\sigma_v^2} \\ &= \frac{|a_1|^2 \sigma_x^2}{\sigma_v^2} + \frac{|a_2|^2 \sigma_x^2}{\sigma_v^2} + \cdots + \frac{|a_M|^2 \sigma_x^2}{\sigma_v^2} \end{aligned} \quad (40)$$

となることから, 最大比合成後の SNR は個々の観測の SNR の和となることが確認できる.

これまで, 送信信号がスカラーのモデル (36) について考えてきたが, (2) のモデルの場合にも同様の手法が適用できる. 重みベクトルを \mathbf{w}_{mrc} とすると, このときの合成後の信号は

$$\begin{aligned} \hat{x}_{\text{mrc}} &= \mathbf{w}_{\text{mrc}}^H \mathbf{y} \\ &= \mathbf{w}_{\text{mrc}}^H \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{w}_{\text{mrc}}^H \mathbf{v} \end{aligned} \quad (41)$$

で与えられる．ただし， \hat{x}_{mrc} はスカラーであり，未知ベクトル \mathbf{x} の直接的な推定値ではないことに注意する．2行目右辺第1項を信号成分，第2項を雑音成分とすると，合成信号のSNRは

$$\begin{aligned}\gamma_{\text{mrc}} &= \frac{E[|\mathbf{w}_{\text{mrc}}^{\text{H}} \mathbf{A} \mathbf{x}|^2]}{E[|\mathbf{w}_{\text{mrc}}^{\text{H}} \mathbf{v}|^2]} \\ &= \frac{\mathbf{w}_{\text{mrc}}^{\text{H}} \mathbf{A} \mathbf{R}_x \mathbf{A}^{\text{H}} \mathbf{w}_{\text{mrc}}}{\sigma_v^2 \mathbf{w}_{\text{mrc}}^{\text{H}} \mathbf{w}_{\text{mrc}}}\end{aligned}\quad (42)$$

となる．したがって， \mathbf{w}_{mrc} として，行列 $\mathbf{A} \mathbf{R}_x \mathbf{A}^{\text{H}}$ の最大固有値に対応する固有ベクトルを選べば良い．また，雑音成分が干渉信号で構成されている等，白色でない雑音を仮定すると，合成信号のSNRは

$$\gamma_{\text{mrc}} = \frac{\mathbf{w}_{\text{mrc}}^{\text{H}} \mathbf{A} \mathbf{R}_x \mathbf{A}^{\text{H}} \mathbf{w}_{\text{mrc}}}{\mathbf{w}_{\text{mrc}}^{\text{H}} \mathbf{R}_v \mathbf{w}_{\text{mrc}}}\quad (43)$$

と表現される．これより， \mathbf{w}_{mrc} として，行列 $\mathbf{A} \mathbf{R}_x \mathbf{A}^{\text{H}}$ と \mathbf{R}_v の一般固有値問題，すなわち $\mathbf{A} \mathbf{R}_x \mathbf{A}^{\text{H}} \mathbf{w} = \lambda \mathbf{R}_v \mathbf{w}$ における最大一般固有値に対応する一般固有ベクトルを選べばよいことが分かる．

3.6 部分空間法

ここでは \mathbf{x} の推定ではなく，行列 \mathbf{A} の成分あるいは \mathbf{A} に含まれるパラメータを \mathbf{y} (の相関行列) から推定することを考える． \mathbf{x} と \mathbf{v} が無相関のとき， \mathbf{y} の相関行列は

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_y &= E[\mathbf{y} \mathbf{y}^{\text{H}}] \\ &= \mathbf{A} \mathbf{R}_x \mathbf{A}^{\text{H}} + \sigma_v^2 \mathbf{I}\end{aligned}\quad (44)$$

で与えられる． \mathbf{R}_y の M 個の固有値をその大きさにより $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M$ とし， $\mathbf{A} \mathbf{R}_x \mathbf{A}^{\text{H}}$ の M 個の固有値を同様に $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_M$ とする． \mathbf{R}_y はエルミート行列なので M 個の互いに直交する固有ベクトルをもち，固有値 λ_m に対応する正規化固有ベクトルを \mathbf{q}_m とすると

$$\begin{aligned}\lambda_m \mathbf{q}_m &= \mathbf{R}_y \mathbf{q}_m \\ &= (\mathbf{A} \mathbf{R}_x \mathbf{A}^{\text{H}} + \sigma_v^2 \mathbf{I}) \mathbf{q}_m \\ &= (\nu_m + \sigma_v^2) \mathbf{q}_m\end{aligned}$$

となる．よって λ_m と ν_m の間には

$$\lambda_m = \nu_m + \sigma_v^2, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (45)$$

なる関係がある．

ここで $M > N$ とし， \mathbf{A} がフル列ランク， \mathbf{R}_x がフルランクと仮定すると， $\mathbf{A} \mathbf{R}_x \mathbf{A}^{\text{H}}$ の固有値は小さい方から $M - N$ 個が全て0となる．よって，(45)はさらに

$$\lambda_m = \begin{cases} \nu_m + \sigma_v^2, & m = 1, \dots, N \\ \sigma_v^2, & m = N + 1, \dots, M \end{cases}\quad (46)$$

となる．実際， $\text{rank } \mathbf{A}^{\text{H}} = N$ より， \mathbf{A}^{H} のカーネル空間 $\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\text{H}})$ の次元は $M - N$ であり， $\mathbf{q} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\text{H}})$ に対しては $\mathbf{R}_y \mathbf{q} = \sigma_v^2 \mathbf{q}$ となる．すなわち， \mathbf{q} は固有値 σ_v^2 に対応する固有ベクトルであり，このカーネル空間の次元は $M - N$ なので，(46)のよう

に重複度は $M - N$ である．よって， $\mathbf{q}_{N+1}, \dots, \mathbf{q}_M$ は $\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\text{H}})$ の基底であり，

$$\mathbf{q}_m^{\text{H}} \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad m = N + 1, \dots, M \quad (47)$$

となる．ここで， $\mathbf{Q}_S = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N]$ ， $\mathbf{Q}_N = [\mathbf{q}_{N+1}, \dots, \mathbf{q}_M]$ と定義すると， $\mathcal{R}(\mathbf{Q}_S)$ は信号部分空間， $\mathcal{R}(\mathbf{Q}_N)$ は雑音部分空間と呼ばれる [2] ($\mathcal{R}(\cdot)$ は行列の列空間)．これは，(47)より $\mathcal{R}(\mathbf{Q}_N) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\text{H}})$ であり，また $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_M$ は正規直交基底であることから $\mathcal{R}(\mathbf{Q}_S) = \mathcal{R}(\mathbf{Q}_N)^{\perp}$ であるが (\perp は直交補空間を表す)，一般に $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\text{H}})^{\perp}$ であることから， $\mathcal{R}(\mathbf{Q}_S) = \mathcal{R}(\mathbf{A})$ 及び $\mathcal{R}(\mathbf{Q}_N) = \mathcal{R}(\mathbf{A})^{\perp}$ が成立するからである．

直交条件 (47) を用いることで \mathbf{A} の成分や \mathbf{A} に含まれるパラメータを推定することが出来る．このような手法は信号部分空間と雑音部分空間の直交性を利用してることから一般に部分空間法と呼ばれる．

3.7 圧縮センシング

圧縮センシングは，真の解 \mathbf{x} がスパースであること，すなわち \mathbf{x} の非零要素の個数が見かけの次元 N に比べてずっと少ないこと，があらかじめ分かっているときに，そのスパース性を利用して $M < N$ の連立方程式 $\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x}$ から真の解を見つけ出すための理論的枠組みである [3-5]．

$M < N$ の場合に $\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x}$ から \mathbf{x} を推定する方法としては，既に正則化による最小ノルム解について述べたが，ここで追加された真の \mathbf{x} がスパースであるという事前知識を考慮すると，素朴でかつ自然な方法は

$$\hat{\mathbf{x}}_{\ell_0} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (48)$$

によって \mathbf{x} を推定する方法である．これは ℓ_0 再構成と呼ばれ，非常に強力であることが知られているが， ℓ_0 -ノルムの離散性と非凸性から一般に NP 困難である．そこで， ℓ_0 -ノルムを ℓ_1 -ノルムに置き換えることで緩和した問題

$$\hat{\mathbf{x}}_{\ell_1} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (49)$$

を考えると，これは線形計画問題に帰着されるため現実的な計算量で解くことが出来る．さらに重要なことに， \mathbf{A} に関するある条件の下では， $M < N$ であってもこの最適化問題を解くことで真の \mathbf{x} が完全再構成されることが理論的に示されている．

雑音を考慮する場合には， $\epsilon > 0$ として等式制約を不等式制約に置き換えることで

$$\hat{\mathbf{x}}_{\ell_1} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 \leq \epsilon \quad (50)$$

を考える．あるいは，ある $\mu > 0$ に対して (50) と同じ解を与える等価な制約無し最適化問題

$$\hat{\mathbf{x}}_{\ell_1 - \ell_2} = \arg \min_{\mathbf{x}} \left(\mu \|\mathbf{x}\|_1 + \frac{1}{2} \|\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 \right) \quad (51)$$

を考えることもある．(51) はコスト関数に ℓ_1 -ノルムと ℓ_2 -ノルムの項が含まれていることから $\ell_1 - \ell_2$ 再構成と呼ばれる．また，よく知られた Lasso (least absolute shrinkage and

selection operator) [6], すなわち

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{lasso}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{x}\|_1 \leq t \quad (52)$$

も (50), (51) と等価な再構成法である。

一般に圧縮センシングでは閉形式の解が得られないため, これらの最適化問題を解くための様々なアルゴリズムが提案されている。圧縮センシングの基本的な考え方や, アルゴリズムの具体例, 通信の問題への応用例については [7] などを参照されたい。

4. 具体例

4.1 通信路等化

通信路等化は周波数選択性の畳み込み通信路によって歪んだ受信信号を補償するための技術であり, そのモデルは典型的に (2) で表現される。具体的には, \mathbf{s} を送信信号ベクトル, \mathbf{r} を受信信号ベクトル, \mathbf{H} を通信路行列, \mathbf{v} を付加雑音ベクトルとして

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{v} \quad (53)$$

と表される。通信路行列 \mathbf{H} の構造やサイズは伝送方式によって異なるが, 最近広く採用されている周波数領域等化を前提としたシステムにおいては, ガード区間であるサイクリックプレフィックスの付加と除去の操作を含めた通信路行列は次の巡回行列となる。

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \dots & 0 & h_L & \dots & h_1 \\ \vdots & h_0 & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ h_L & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & h_L \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & h_L & \dots & h_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{M \times M}$$

ここで, h_0, \dots, h_L は通信路のインパルス応答である。任意の巡回行列は離散フーリエ変換 (DFT: discrete Fourier transform) 行列

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi \times 1 \times 1}{M}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi \times 1 \times (M-1)}{M}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi \times (M-1) \times 1}{M}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi \times (M-1) \times (M-1)}{M}} \end{bmatrix}$$

によってユニタリ相似変換されるという非常に有用な性質もっている。すなわち, \mathbf{H} はその成分 $\{h_0, h_1, \dots, h_L\}$ の値によらず

$$\mathbf{H} = \mathbf{D}^H \mathbf{\Lambda} \mathbf{D} \quad (54)$$

と書くことができる。ただし, $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}[\lambda_1 \dots \lambda_M]$ であり, その対角成分は

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_M \end{bmatrix} = \sqrt{M} \mathbf{D} \begin{bmatrix} h_0 \\ \vdots \\ h_L \\ \mathbf{0}_{(M-L-1) \times 1} \end{bmatrix} \quad (55)$$

で定義される^(注2)。これより, 受信信号ベクトルは

$$\mathbf{r} = \mathbf{D}^H \mathbf{\Lambda} \mathbf{D} \mathbf{s} + \mathbf{v} \quad (56)$$

と書くことができる。

線形等化を仮定し, 等化器出力を

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{W}^H \mathbf{r} \quad (57)$$

とすると, ZF 等化の場合には (5) より

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^H &= (\mathbf{D}^H \mathbf{\Lambda} \mathbf{D})^{-1} \\ &= \mathbf{D}^{-1} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{D}^{-H} \\ &= \mathbf{D}^H \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{D} \end{aligned} \quad (58)$$

となる。また, MMSE 等化の場合には, (30) より

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^H &= \sigma_s^2 \mathbf{H}^H (\sigma_s^2 \mathbf{H} \mathbf{H}^H + \sigma_v^2 \mathbf{I})^{-1} \\ &= \sigma_s^2 \mathbf{D}^H \mathbf{\Lambda}^H \mathbf{D} (\sigma_s^2 \mathbf{D}^H \mathbf{\Lambda} \mathbf{D} + \sigma_v^2 \mathbf{I})^{-1} \\ &= \mathbf{D}^H \mathbf{\Lambda}^H \left(\mathbf{\Lambda} \mathbf{\Lambda}^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{D} \end{aligned}$$

となる。ただし, $E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H] = \sigma_s^2 \mathbf{I}$ とし, \mathbf{D} がユニタリ行列であるという性質を用いている。等化器行列 \mathbf{W}^H は, ZF 等化と MMSE 等化の何れの場合も, 対角行列を IDFT の操作を表す \mathbf{D}^H と DFT の操作を表す \mathbf{D} で挟んだ形になっているため, 高速フーリエ変換 (FFT: fast Fourier transform) を用いた周波数領域での 1 タップ等化によって効率的に等化を実現できる。

ここでは, 周波数領域等化を前提として ZF 推定と MMSE 推定の例を示したが, 最尤推定に基づく最尤系列推定 (MLSE: maximum likelihood sequence estimation) も一般に等化基準としてよく用いられている。

4.2 通信路推定

通信路推定は, 等化器ウェイトの決定や様々な信号処理に必要な通信路に関する情報, すなわち, 通信路のインパルス応答や周波数応答を推定する問題である。元になるモデルは通信路等化の場合と同様に

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}\mathbf{p} + \mathbf{v} \quad (59)$$

で表される。ただし, ここでは送信信号ベクトルとして既知のパイロット信号ベクトル $\mathbf{p} = [p_1 \dots p_M]^T$ を仮定している。さらに, 通信路等化の例と同様に通信路行列 \mathbf{H} が巡回行列であるとすると, 巡回行列の性質から (59) は

$$\mathbf{r} = \mathbf{P}\mathbf{h} + \mathbf{v} \quad (60)$$

(注2): $[\lambda_1, \dots, \lambda_M]^T$ は通信路のインパルス応答の離散フーリエ変換であり, 通信路の周波数応答に他ならない。

と書き直される．ここで、 \mathbf{P} はパイロット信号で構成される巡回行列

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & p_M & \cdots & p_2 \\ p_2 & p_1 & & p_3 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_M & p_{M-1} & \cdots & p_1 \end{bmatrix} \quad (61)$$

であり、 \mathbf{h} は \mathbf{H} の 1 列目のベクトルである．

(60) から \mathbf{h} を推定する問題は、 \mathbf{H} が巡回行列であるときに (53) から \mathbf{s} を推定する問題と本質的に同じである．このため、基本的には前節と同様の推定法が同じように適用可能であるが、等化の場合と異なり、 $E[\mathbf{h}\mathbf{h}^H]$ は通常事前に分からないため、MMSE 推定よりも ZF 推定に相当する \mathbf{P} の逆行列を用いた推定法を用いることが多い^(注3)．ただし、通信路推定の場合には、通常 ZF 推定ではなく最小 2 乗推定と呼ばれる．

ここでは、巡回構造をもつ通信路行列を仮定し、通信路行列とパイロット信号ベクトルの役割の入れ替えを行なうことで、線形観測モデル (60) を得たが、テプリッツ構造をもつ通常の畳み込み通信路行列の場合にも同様の入れ替えが可能である．また、インパルス応答 \mathbf{h} の成分がスパースである場合には圧縮センシングの手法がそのまま適用でき、これによって必要なパイロット信号数を減らす検討も行なわれている．

4.3 MIMO 通信

MIMO 通信は複数アンテナを備えた送受信機間で行なう通信であり、その受信信号モデルとして、そのまま (2) が利用できる．送信アンテナ数を N 、受信アンテナ数を M とすると、 $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^N$ を送信信号ベクトル、 $\mathbf{r} \in \mathbb{C}^M$ を受信信号ベクトル、 $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ を通信路行列、 $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^M$ を付加雑音ベクトルとして

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{v} \quad (62)$$

となる．ここで、各アンテナ間の通信路は複素数のゲインで表されるフラットフェージング通信路を仮定している．畳み込み通信路の場合は、前述の周波数領域等化によるブロック伝送方式と組み合わせることで、(62) と同様のモデルが得られる．

MIMO 通信のモデル (62) は、通信路等化や通信路推定の場合のそれと式の上では同一の形をしているが、MIMO 通信の場合には通信路行列 \mathbf{H} に巡回性やテプリッツ性などの確定的な構造を仮定することがほとんどなく、多くの場合ランダム行列として扱われる．このため、MIMO 通信の信号検出法はその多くが一般的で他の問題にも応用しやすく、特に [11] などの MIMO 通信のテキストは通信のための信号処理手法を効率的に学ぶのに適している．MIMO 通信では、本稿で述べたほとんどの信号推定法がその検出法として検討されている．

4.4 到来方向推定

複数のアンテナで観測される信号を用いて、信号の到来方向を推定する問題を考える．簡単のため、到来する N 個の信号は狭帯域であるとし、 M 個のアンテナ素子が直線上に等間隔 d で並んでいるとする (図 1 参照)．

(注3): 何らかの方法で $E[\mathbf{h}\mathbf{h}^H]$ の情報を得ることで、MMSE 推定を利用して推定精度を向上させる方法も検討されている

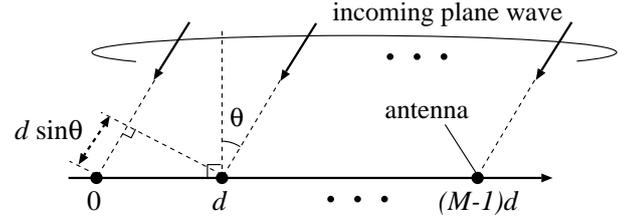


図 1 等間隔直線アンテナアレー

n 番目の到来波がアンテナ素子の並びに垂直な方向から θ_n の角度で到来するとき、この狭帯域信号に対する隣り合うアンテナ素子での受信信号の相違は、行路差 $d \sin \theta_n$ に起因する位相差

$$\phi_n = 2\pi \frac{d \sin \theta_n}{\eta} \quad (63)$$

のみとなる．ここで、 η は到来波の波長である．これより、1 番目のアンテナ素子での各到来波の受信信号成分を $\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ とすると、 m 番目のアンテナ素子での受信信号は

$$r_m = \sum_{n=1}^N s_n e^{j\phi_n m} + v_m \quad (64)$$

となる．ここで、 v_m は平均 0、分散 σ_v^2 の白色雑音である．これをまとめると

$$\mathbf{r} = [r_1 \cdots r_M]^T = \sum_{n=1}^N s_n \mathbf{a}(\theta_n) + \mathbf{v} \quad (65)$$

と書ける．ただし、 $\mathbf{v} = [v_1 \cdots v_M]^T$ であり、

$$\mathbf{a}(\theta) = \left[1, e^{j2\pi \frac{d \sin \theta}{\eta}}, \dots, e^{j2\pi \frac{(N-1)d \sin \theta}{\eta}} \right]^T \quad (66)$$

である．さらに、 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1) \cdots \mathbf{a}(\theta_N)]$ 、 $\mathbf{s} = [s_1 \cdots s_N]^T$ と定義することで、(2) と同じ形のモデル

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{v} \quad (67)$$

を得る．ただし、ここでの目的は \mathbf{s} の推定ではなく、到来方向の推定、言い換えると行列 \mathbf{A} に含まれるパラメータの推定である．そこで、部分空間法の利用を考える．到来波数 N とアンテナ素子数 M が $M > N$ であるとする、(47) から

$$\mathbf{q}_m^H \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad m = N+1, \dots, M \quad (68)$$

なる関係が成り立つ．ここで、 \mathbf{q}_m は $\mathbf{R} = E[\mathbf{r}\mathbf{r}^H]$ の小さい $M - N$ 個の固有値に対応する固有ベクトルである．このとき、

$$S(\theta) = \frac{1}{\sum_{m=N+1}^M |\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{q}_m|^2} \quad (69)$$

で θ を変化させると、到来波に対応した到来角 $\theta = \theta_n$ ($n = 1, \dots, N$) で分母が 0 となり、そのグラフに鋭いピークができるため、これにより信号の到来角を推定できる．この方法は MUSIC (multiple signal classification) 法 [12] と呼ばれ、圧縮センシングを用いた拡張も検討されている [13]．

5. ま と め

本稿では、無線通信で使用される典型的な信号処理技術についてその基本的な考え方を数理的な手法の視点から解説した。現在の無線通信システムでは様々な手法が用いられているが、ほとんどの場合、本稿で説明したいいずれかの手法がその基礎となっている。本稿が、無線通信のための信号処理技術を理解する助けとなることを願っている。

付 録

複素数と複素ベクトル、複素行列に関する微分

無線通信のための信号処理でよく使う計算規則について以下に記す。証明などの詳細については、線形代数や信号処理の教科書を参照されたい(例えば、[8-10]など)。

複素数 $z = x + jy$ (j : 虚数単位) の関数 $f(z)$ の、 z およびその共役 z^* についての導関数はそれぞれ

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f(z)}{\partial x} - j \frac{\partial f(z)}{\partial y} \right) \quad (\text{A}\cdot 1)$$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f(z)}{\partial x} + j \frac{\partial f(z)}{\partial y} \right) \quad (\text{A}\cdot 2)$$

と定義される [8]。特に、

$$\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial z^*}{\partial z^*} = 1 \quad (\text{A}\cdot 3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial z^*} = \frac{\partial z^*}{\partial z} = 0 \quad (\text{A}\cdot 4)$$

となることに注意する。

複素数の列ベクトル $\mathbf{z} = [z_1 \cdots z_M]^T$, $z_m = x_m + jy_m$ についての偏微分は次で与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}^H} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} + j \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} + j \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_M} + j \frac{\partial}{\partial y_M} \end{bmatrix} \quad (\text{A}\cdot 5)$$

これより、 \mathbf{a} , \mathbf{A} をそれぞれ定係数ベクトル、定係数行列とすると

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}^H} (\mathbf{z}^H \mathbf{a}) = \mathbf{a} \quad (\text{A}\cdot 6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}^H} (\mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{z}) = \mathbf{A} \mathbf{z} \quad (\text{A}\cdot 7)$$

となる。これは実数ベクトルによる微分の場合と異なっていることに注意する (\mathbf{x} が実数の列ベクトルの場合は、それぞれ

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}^T \mathbf{a}) = \mathbf{a} \quad (\text{A}\cdot 8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \mathbf{x} \quad (\text{A}\cdot 9)$$

となる)。なお、関数 $f(\mathbf{z})$ の勾配ベクトルは

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} + j \frac{\partial f}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} + j \frac{\partial f}{\partial y_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_M} + j \frac{\partial f}{\partial y_M} \end{bmatrix} \quad (\text{A}\cdot 10)$$

で定義されることから、

$$\nabla f = 2 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}^H} \quad (\text{A}\cdot 11)$$

である。

\mathbf{Z} が複素行列の場合は

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{Z}^H} (\text{tr} \{ \mathbf{Z}^H \mathbf{A} \}) = \mathbf{A} \quad (\text{A}\cdot 12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{Z}^H} (\text{tr} \{ \mathbf{Z}^H \mathbf{A} \mathbf{Z} \}) = \mathbf{A} \mathbf{Z} \quad (\text{A}\cdot 13)$$

である。

文 献

- [1] 片山徹, 新版応用カルマンフィルタ, 朝倉書店, 2000.
- [2] 酒井英昭, “主成分分析と独立成分分析,” システム/制御/情報, vol. 43, no. 4, pp. 188-195, 1999.
- [3] D.L. Donoho, “Compressed sensing,” IEEE Trans. Inf. Theory, vol.52, no.4, pp.1289-1306, April 2006.
- [4] E.J. Candes and T. Tao, “Decoding by linear programming,” IEEE Trans. Inf. Theory, vol.51, no.12, pp.4203-4215, Dec. 2005.
- [5] E.J. Candes, J. Romberg, and T. Tao, “Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information,” IEEE Trans. Inf. Theory, vol.52, no.2, pp.489-509, Feb. 2006.
- [6] R. Tibshirani, “Regression shrinkage and selection via the lasso,” J. R. Statist. Soc. B, vol.58, no.1, pp.267-288, 1996.
- [7] K. Hayashi, M. Nagahara, T. Tanaka, “A User’s Guide to Compressed Sensing for Communications Systems,” IEICE Trans. Commun., Vol. E96-B, No. 03, pp.685-712, Mar. 2013
- [8] L. Schwartz, シュバルツ解析学 6 複素関数, 東京図書株式会社, 1971.
- [9] S. Haykin, Adaptive Filter Theory, 3rd Edition, Prentice Hall, 1996.
- [10] T. Kailath, A. Sayed, B. Hassibi, Linear Estimation, Prentice Hall, 2000.
- [11] 大鐘武雄, 小川恭孝, わかりやすい MIMO システム技術, オーム社, 2009.
- [12] R. O. Schmidt, “Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation,” IEEE Trans. Antennas and Propag., Vol. AP-34, Vo. 3, pp. 276-280, 1986.
- [13] 林 和則, “狭帯域信号の到来方向推定,” 電子情報通信学会 基礎・境界ソサイエティ Fundamentals Review, Vol. 8, No. 3, pp. 143-150, Jan. 2015.