

EM アルゴリズムを用いた確率的通信路に対する 適応等化法*

河本 孝生[†]・岩田 一貴[†]・池田 和司[†]・林 和則[†]・酒井 英昭[†]

An Adaptive Equalizer for Stochastic Communication Channels with the EM Algorithm*

Takao KOMOTO[†], Kazunori IWATA[†], Kazushi IKEDA[†], Kazunori HAYASHI[†] and Hideaki SAKAI[†]

1. はじめに

未知通信路を経由した受信信号から送信シンボルを推定する問題を考えよう。ここでは教師信号は仮定せず、いわゆるブラインド等化問題を考える。この場合、事後確率が最大となるシンボルを選択するベイズ推定が誤り確率を最小にすることはよく知られており、送信シンボルが等確率である時には、これは最尤推定と一致する [1]。したがって本論文でも送信シンボル推定において尤度最大化を行う。

等化問題において、通信路は遅延を含む未知定数と仮定される場合が多いが、実際には通信路の特性は変動する [1]。そこで本速報では、通信路が確率的であると仮定して送信シンボルを推定する方法を提案する。

2. 確率的通信路

離散時間での通信路等化問題を考える。時刻 k , $k = 1, 2, \dots, K$, の送信シンボルを $x(k) \in S$ とし、送信シンボル列を $\mathbf{x} = \{x(k)\}_{k=1}^K \in S^K$ とする。ただし S は送信シンボルの集合で $S = \{s_1, s_2, \dots, s_M\}$, $s_m \in C$ である。

確率的通信路を明示的にモデル化することの影響を調べるため、本速報では $x(k)$, $y(k)$, $s_m \in R$ かつ $M=2$ で $s_1 < s_2$ という最も簡単な場合を取り扱う。すなわち時刻 k の受信信号 $y(k) \in R$ は $y(k) = a(k)x(k) + n(k)$ であり、ここで $n(k) \in R$ は $N(0, \sigma_n^2)$ に従う白色観測雑音、 $a(k)$ は時刻 k の係数を表す。受信信号列を $\mathbf{y} = \{y(k)\}_{k=1}^K$ と書くと、 $x(k)$ および $n(k)$ の白色性から

$$P(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^K P(y(k)|x(k)) \quad (1)$$

が成り立つ。

ブラインド等化においては事後確率 $P(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ を最大に

する $\mathbf{x} \in S^K$ を推定シンボルとする、いわゆるベイズ推定が誤り確率を最小にすることが知られており [1]、各シンボルの発生確率 $P(x)$ が等しいことを仮定すれば、ベイズの定理 $P(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = P(\mathbf{y}|\mathbf{x})P(\mathbf{x})/P(\mathbf{y})$ により、ベイズ推定は $P(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ の最大化、すなわち最尤推定と等価である。したがって (1) により、最尤推定は各 k について $P(y(k)|x(k))$ を最大化する $x(k)$ を見つけることに帰着される。

通信路の係数が定数である場合には $a(k) = a$ であるので、 $x(k) = s_m$ のときに $P(y(k)|x(k))$ は $N(as_m, \sigma_n^2)$ に従う。したがって最尤推定は最近傍法と等価となり、 $M=2$ の場合には以下の判定法に帰着される：

$y(k) < a(s_1 + s_2)/2$ ならば s_1 , そうでない場合には s_2 .¹

しかし通信路の係数 $a(k)$ が未知の正規分布 $N(\bar{a}, \sigma_a^2)$ に独立に従う場合には、 $x(k) = s_m$ のときに $y(k)$ が $N(s_m \bar{a}, |s_m|^2 \sigma_a^2 + \sigma_n^2)$ に従い、 $|s_1| \neq |s_2|$ ならば符号に応じて分散が異なる。よって最尤推定によるしきい値は \bar{a} , σ_a^2 , σ_n^2 に依存し $a(s_1 + s_2)/2$ とは異なるので、 \mathbf{y} からこれらのパラメータを推定することにより等化能力が高まることが期待できる。このとき、もし $|s_1| = |s_2|$ ならば分散は一定なので、提案方法には利点がない。しきい値に推定値を用いるため、推定誤差により、かえって性能が劣化する可能性もある。

3. EM アルゴリズムと提案手法

通信路のパラメータや雑音のパラメータおよび送信シンボルの推定には EM (Expectation-Maximization) アルゴリズム [3] を用いることができる。EM アルゴリズムの枠組みは、未知パラメータと欠損データを交互に推定する反復的手法であり、情報幾何学的見地からも興味深いアルゴリズムである [4]。通信分野でも応用例があり、たとえば [5] では定数通信路におけるブラインド等化問題に、[6] では時変通信路における CPM (continuous

¹これは最適な場合であり、実際には a は未知であるので受信信号から a を推定する必要がある。

* 原稿受付 2003年12月1日

[†] 京都大学 大学院 情報学研究科 Graduate School of Informatics, Kyoto University; Yoshida-Honmachi, Sakyo, Kyoto 606-8501, JAPAN

Key Words: blind equalization, EM algorithm, maximum likelihood estimation.

phase modulated) 信号のブライント等化問題にそれぞれ EM アルゴリズムを応用している. 本速報では y を観測データ, x を欠損データ, $\theta = (\bar{a}, \sigma_a^2, \sigma_n^2)$ を未知パラメータとみなして θ を最尤推定する方法を用いる [5,7]. すなわち, 対数尤度関数を直接最大化する代わりに

$$Q(\theta|\hat{\theta}) = \sum_x P(x|y, \hat{\theta}) \log P(x, y|\theta) \quad (2)$$

を最大化する θ を求める. ここで $\hat{\theta}$ は θ の推定値である. 対数関数の凸性から Q は対数尤度関数の下限となる. 適当な初期値 $\theta^{(0)}$, 適当な停止条件のもとで

$$\theta^{(t+1)} = \operatorname{argmax}_{\theta} Q(\theta|\theta^{(t)}) \quad (3)$$

により $\theta^{(t)}$ から $\theta^{(t+1)}$ を求めることを繰り返して Q を最大化する. ここで (t) は t 回の反復による推定値であることを示している. このアルゴリズムは, 対数尤度を局所最大化するパラメータに収束する [7].

未知パラメータの推定値 $\theta^{(t)}$ を用い, $P(x|y, \theta^{(t)})$ を最大化する x が送信シンボルのベイズ推定値である. 後述するように, $P(x|y, \theta^{(t)})$ は EM アルゴリズムの更新式中に現れる.

以下では更新式の導出の概略を述べる. 通信路の係数 $a(k)$ と観測雑音 $n(k)$ が正規分布に従うので, 送信シンボルが $x(k) = s_m$ であるときの受信信号 $y(k)$ の分布 $P(y(k)|x(k) = s_m)$ は正規分布に従う. したがって $P(y(k))$ は混合正規分布に従い, その推定には [8] とほぼ同様の方法を用いることができる. 具体的には, $\alpha_m = P(s_m)$, $\mu_m = s_m \bar{a}$, $\sigma_m^2 = |s_m|^2 \sigma_a^2 + \sigma_n^2$ と書くこととし, パラメータを $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$ と再定義すれば, $x(k) = s_m$ のとき $y(k)$ の分布は $N(\mu_m, \sigma_m^2)$ となるので, $y(k)$ の確率密度関数は

$$P(y(k)|\theta) = \sum_{m=1}^2 \alpha_m G(y|\mu_m, \sigma_m^2) \quad (4)$$

と表される. ここで $G(y|\mu, \sigma^2)$ は平均 μ , 分散 σ^2 の確率密度関数である. したがって $Q(\theta|\theta^{(t)})$ は

$$P_{mk}^{(t)} = P(x(k) = s_m | y(k), \theta^{(t)}) \quad (5)$$

$$= \frac{\alpha_m^{(t)} P(y(k)|\mu_m^{(t)}, \sigma_m^{2(t)})}{\sum_{l=1}^2 \alpha_l^{(t)} P(y(k)|\mu_l^{(t)}, \sigma_l^{2(t)})} \quad (6)$$

を用いて

$$Q(\theta|\theta^{(t)}) = \sum_{k,m} P_{mk}^{(t)} \log(\alpha_m G(y(k)|\mu_m, \sigma_m^2)) \quad (7)$$

と表される. したがって λ を未定乗数としたラグランジュ方程式

$$J = Q(\theta|\theta^{(t)}) - \lambda \left(\sum_{m=1}^2 \alpha_m - 1 \right) \quad (8)$$

の停留値を求めることにより, (3) 式は

$$\alpha_m^{(t+1)} = \frac{\sum_{k=1}^K P_{mk}^{(t)}}{K} \quad (9)$$

$$\mu_m^{(t+1)} = \frac{\sum_{k=1}^K P_{mk}^{(t)} y(k)}{K \alpha_m^{(t+1)}} \quad (10)$$

$$\sigma_m^{2(t+1)} = \frac{\sum_{k=1}^K P_{mk}^{(t)} |y(k) - \mu_m^{(t+1)}|^2}{K \alpha_m^{(t+1)}} \quad (11)$$

と明示的に書き下せる.

(6) 式および (9)–(11) 式を交互に用いて推定値を反復更新することにより, θ および

$$P_{mk} = P(x(k) = s_m | y(k), \theta) \quad (12)$$

の推定値が与えられる. したがって P_{mk} を最大にする m について s_m を $x(k)$ の推定シンボルとする.

4. 計算機実験

$|s_1| \neq |s_2|$ のときの提案手法の有効性を確認し, $|s_1| = |s_2|$ のときの提案手法の性能を調べるため, 計算機実験を行った. 従来法の最尤推定がベイズ推定と一致するように $P(x(k) = s_1) = P(x(k) = s_2) = 1/2$ とし, $a \sim N(1, 0.01)$, $K = 1000$ とした. 下図は 10000 回の試行の平均をとった場合の S/N 比とビット誤り率 (bit-error rate, BER) の関係を示している. ただし実線は EM アルゴリズムを用いた提案手法, 破線は通信路の確率性を考慮しない従来手法であり, Fig. 1 では $s_1 = 1, s_2 = 2$, Fig. 2 では $s_1 = -1, s_2 = 1$ である. なお, EM アルゴリズムの停止条件には $\|\theta^{(t+1)} - \theta^{(t)}\|_{\infty} < 10^{-4}$ を用いた. ここで $\|\cdot\|_{\infty}$ は最大値ノルムであり, 停止までの反復回数は S/N 比にもよるが平均して 100 回程度であった. これらの図から, 入力シンボルの振幅が異なる場合には提案手法の方が優れており, 入力シンボルの振幅が同じであっても性能の劣化はほとんど認められないことがわかる.

5. 16QAM への拡張

16QAM とは振幅と位相の異なる 16 点をシンボルとする多値複素符号であり 16QAM では 3 種類の振幅があり, 同じ振幅を持つ符号同士では位相のみが異なる (Fig. 3). 提案手法は複素数の場合にも容易に拡張できるので, 本節では提案手法を 16QAM に拡張することを考える. 前節での実験結果から, 振幅の異なる符号間では提案手法が効果的に働き, 同じ振幅を持つ符号間でも性能の劣化はほとんどないので, 総合的には性能が向上することが期待できる. 同様に 64QAM, 256QAM などにも応用できるが, QPSK や 8PSK のように単一の振幅をもち位相を変調する符号には提案手法は応用できない. 更新式は (6) 式および (9)–(11) 式がほぼそのまま利用できる.

16QAM における有効性を確認するため, $m = 16$ で符号を $S = \{\pm 1 \pm i, \pm 1 \pm 3i, \pm 3 \pm i, \pm 3 \pm 3i\}$ とし, す

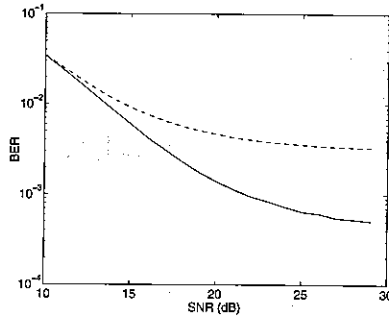
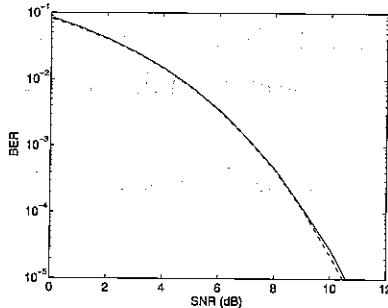
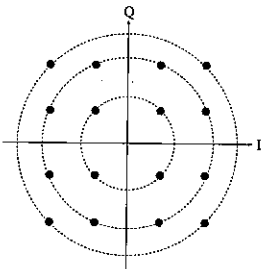
Fig. 1 BER performance $s_1 = 1, s_2 = 2$ Fig. 2 BER performance $s_1 = -1, s_2 = 1$ 

Fig. 3 Code location of 16QAM

すべての符号が等確率で選ばれとして計算機実験を行った。 $a(k)$ は実部と虚部をそれぞれ独立に白色正規分布 $N(1, 0.01)$ より選び、 $K = 1000$ として 10000 回の試行の平均をとった場合の S/N 比と BER の関係を Fig. 4 に示した。ここで実線は EM アルゴリズムを用いた提案手法、破線は通信路が確定的である場合の従来手法であり、EM アルゴリズムの停止条件は前実験と同様である。前節で振幅が異なる場合と同様、提案手法の有効性が確認された。

6. おわりに

本速報では、通信路に確率モデルを導入し、EM アルゴリズムを用いた符号ブラインド等化法を提案した。本手法の有効性は原理的には用いられる符号の振幅に依存

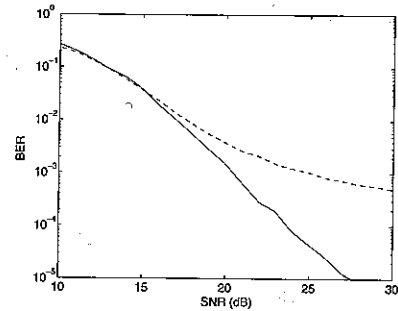


Fig. 4 BER performance (16QAM)

し、振幅の異なる符号を用いている場合には有効であり、これは計算機実験により確認された。提案手法を振幅が同じ符号に適用した場合には、本来同じ値である分散を受信信号から推定するため、推定誤差により分離境界面（しきい値）が最適値からずれる危険性があるが、計算機実験によりその悪影響はほとんどないことが示された。上記の知見を元に提案手法を 16QAM に応用したところ、その有効性が確認された。本手法をオンライン型に修正すること、一般の FIR 通信路に拡張することなどが今後の課題である。

参考文献

- [1] J. G. Proakis: *Digital Communications*, 3rd ed., McGraw-Hill (1995)
- [2] S. Haykin: *Adaptive Filter Theory*, 3rd ed., Prentice-Hall (1996)
- [3] A. Dempster, N. Laird and D. Rubin: Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm; *J. Roy. Statist. Soc. B*, Vol. 39, pp. 1-38 (1977)
- [4] S. Amari: Information geometry of the EM and *em* algorithms for neural networks; *Neural Networks*, Vol. 8, pp. 1379-1408 (1995)
- [5] C. N. Georghiadis and J. C. Han: Sequence estimation in the presence of random parameters via the EM algorithm; *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 45, pp. 300-308 (1997)
- [6] L. M. Zeger and H. Kobayashi: A simplified EM algorithm for detection of CPM signals in a fading multipath channel; *Wireless Networks*, Vol. 8, pp. 649-658 (2002)
- [7] 上田: ベイズ学習 [1]; 電子情報通信学会誌, Vol. 85, pp. 265-271 (2002)
- [8] B. Shahshahani and D. Landgrebe: The effect of unlabeled samples in reducing the small sample size problem and mitigating the hughes phenomenon; *IEEE Trans. GRS*, Vol. 32, pp. 1087-1095 (1994)